Івасишен С. Д., Пасічник Г. С.

ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯННЯ ТИПУ КОЛМОГОРОВА ЗІ ЗРОСТАЮЧИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ ТА ВИРОДЖЕННЯМИ НА ПОЧАТКОВІЙ ГІПЕРПЛОЩИНІ

Доведено теореми про інтегральне зображення розв'язків неоднорідного виродженого рівняння типу Колмогорова, які як функції x можуть зростати, а при $t \to 0$ поводяться відповідним способом залежно від типу виродження рівняння при $t = 0$.

Ключові слова і фрази: ультрапараболічне рівняння типу Колмогорова, виродження на початковій гіперплощині, фундаментальний розв'язок задачі Коші, інтегральне зображення розв'язку.

Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського", м. Київ, Україна (Івасишен С. Д.)
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, м. Чернівці, Україна (Пасічник Г. С.)
e-mail: *pasichnyk.gs@gmail.com (Пасічник Г. С.)*

Вступ

У працях [1, 2] зроблено огляд праць, в яких розглядаються в $\Pi_{(0,T]} := (0, T] \times \mathbb{R}^n$ параболічні за Петровським, параболічні за Ейдельманом та ультрапараболічні рівняння та системи рівнянь, які містять виродження на початковій гіперплощині. Ці виродження класифікуються за величинами

$$A(t,\tau) := \int_\tau^t \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \quad \text{і} \quad B(t,\tau) := \int_\tau^t \frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}\, d\theta,$$

де α і β – неперервні на $[0, T]$ функції, для яких $\alpha(t) > 0$, $\beta(t) > 0$ при $t > 0$ і $\alpha(0)\beta(0) = 0$, причому функція β монотонно неспадна.

У випадку, коли $A(T, 0) < +\infty$, рівняння має слабке виродження, а коли $A(T, 0) = +\infty$, то – сильне. Якщо $A(T, 0) = +\infty$ і $B(T, 0) = +\infty$, то маємо випадок дуже сильного виродження.

УДК 517.956.4
2010 *Mathematics Subject Classification:* 35K52, 35B53.

У цій статті розглядається ультрапараболічне рівняння типу Колмогорова, в якому є нескінченно зростаючі при $|x| \to \infty$ молодші коефіцієнти та виродження при $t = 0$. Зазначимо, що в [1] для розглядуваного рівняння доведено теореми про інтегральне зображення розв'язків неоднорідного рівняння, які є обмеженими, як функції x, а при $t \to 0$ поводяться відповідним способом залежно від типу виродження рівняння при $t = 0$. Тут доводяться аналогічні теореми для розв'язків, які, як функції x, можуть необмежено зростати певним чином.

1 Постановка задачі і допоміжні відомості

Нехай n_1, n_2, n_3 – задані натуральні числа такі, що $n_3 \le n_2 \le n_1$; $n := n_1 + n_2 + n_3$; змінна $x \in \mathbb{R}^n$ складається з трьох груп змінних $x_l := (x_{l1}, \dots, x_{ln_l}) \in \mathbb{R}^{n_l}$, $l \in \{1, 2, 3\}$, так що $x := (x_1, x_2, x_3)$. У шарі $\Pi_{(0,T]} := (0, T] \times \mathbb{R}^n$ скінченної товщини $T > 0$ розглядатимемо такі рівняння:

$$(L\,u)(t,x) := \alpha(t)\partial_t u(t,x) - \beta(t)\Bigg(\sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} u(t,x) + \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j}\partial_{x_{3j}} u(t,x) +$$

$$+\sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1s}} u(t,x) + b\sum_{j=1}^{n_1}\partial_{x_{1j}}\Big(x_{1j}u(t,x)\Big)\Bigg) - au(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \qquad (1)$$

і

$$(L^*v)(\tau,\xi) := -\alpha(\tau)\partial_\tau v(\tau,\xi) + \beta(\tau)\Bigg(\sum_{j=1}^{n_2} \xi_{1j}\partial_{\xi_{2j}} v(\tau,\xi) + \sum_{j=1}^{n_3} \xi_{2j}\partial_{\xi_{3j}} v(\tau,\xi) -$$

$$-\sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}\partial_{\xi_{1j}}\partial_{\xi_{1s}} v(\tau,\xi) + b\sum_{j=1}^{n_1}\xi_{1j}\partial_{\xi_{1j}} v(\tau,\xi)\Bigg) - a\,v(\tau,\xi) = 0, \quad (\tau,\xi) \in \Pi_{(0,T]}, \qquad (2)$$

де a_{js}, b і a – дійсні сталі, причому $a_{js} = a_{sj}$, $\{j, s\} \subset \{1, ..., n_1\}$, і $b \ne 0$, та виконується умова параболічності

$$\exists\,\delta > 0 \quad \forall\,\sigma_1 := (\sigma_{11}, ..., \sigma_{1n_1}) \in \mathbb{R}^{n_1} : \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}\sigma_{1j}\sigma_{1s} \ge \delta|\sigma_1|^2.$$

Рівняння (1) є ультрапараболічним рівнянням типу Колмогорова, в якому коефіцієнти групи старших членів сталі, а коефіцієнти в групі молодших членів є зростаючими на нескінченності, причому рівняння містить виродження на початковій гіперплощині $\{t = 0\}$.

Оскільки рівняння (1) і (2) при $t = 0$ вироджуються, то для них не завжди можна розглядати задачу Коші з початковими даними при $t = 0$ у звичайному розумінні, але можна говорити про фундаментальний розв'язок задачі Коші згідно з такими означеннями.

Означення 1. *Фундаментальним розв'язком задачі Коші для рівняння* (1) *називається функція* $G(t, x; \tau, \xi)$, $0 < \tau < t \le T$, $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, *така, що формула*

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi, \;\; (t,x) \in \Pi_{(\tau,T]},$$

визначає розв'язок рівняння (1) *для* $(t,x) \in \Pi_{(\tau,T]}$, *який задовольняє початкову умову*

$$u(t,x)\Big|_{t=\tau} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

для будь-якого $\tau \in (0,T)$ *і довільної неперервної та обмеженої функції* φ.

Означення 2. *Фундаментальним розв'язком задачі Коші для рівняння* (2) *називається функція* $G^*(\tau,\xi;t,x)$, $0<\tau<t\le T$, $\{\xi,x\}\subset\mathbb{R}^n$, *така, що формулою*

$$v(\tau,\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G^*(\tau,\xi;t,x)\varphi(x)\,dx,\ (\tau,\xi)\in\Pi_{(\tau,t)},$$

визначається в $\Pi_{(\tau,t)}$ *розв'язок рівняння* (2), *який задовольняє умову*

$$v(\tau,\xi)\Big|_{\tau=t} = \varphi(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

для будь-якого $t \in (0,T]$ *і довільної неперервної та обмеженої функції* φ.

У праці [1] знайдено в явному вигляді функції G і G^* та вивчено їх властивості, з яких, зокрема, випливає додатність функції G, правильність рівності

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi)\,d\xi = E^{a,b}(t,x), \quad 0<\tau<t\le T, \quad x\in\mathbb{R}^n, \tag{3}$$

та оцінок

$$|\partial_{x_1}^{k_1}\partial_{x_2}^{k_2}\partial_{x_3}^{k_3}G(t,x;\tau,\xi)| \le C_{k_1k_2k_3}E^{a,b}(t,\tau)\prod_{l=1}^{3}(p_l(B(t,\tau)))^{-(n_l+|k_l|)/2}\times$$
$$\times\hat{E}_c(t,x;\tau,\xi), \quad 0\le\tau<t\le T, \quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n, \tag{4}$$

в яких k_l – n_l-вимірний мультиіндекс, $l\in\{1,2,3\}$, $C_{k_1k_2k_3}$ і c – додатні сталі, які залежать лише від коефіцієнтів a_{jl}, b, n_1, n_2 і n_3, а також від T тільки у випадку, коли $b>0$;

$$E^{a,b}(t,\tau) := \exp\{aA(t,\tau)+n_1bB(t,\tau)\},$$
$$\hat{E}_c(t,x;\tau,\xi) := \exp\Big\{-c\Big(\frac{|e^{bB(t,\tau)}X_1(B(t,\tau))-\xi_1|^2}{p_1(B(t,\tau))}+\sum_{l=2}^{3}\frac{|X_l(B(t,\tau))-\xi_l|^2}{p_l(B(t,\tau))}\Big)\Big\},$$

де $X_1(t) := x_1$, $X_2(t) := x_2+\alpha_b(t)\hat{x}_1$, $X_3(t) := x_3+tx_2'+\frac{\alpha_b(t)-t}{b}x_1'$, $x_1 := (x_1',x_1'',x_1''')$, $\hat{x}_1 := (x_1',x_1'')$, $x_1' := (x_{11},...,x_{1n_3})$, $x_1'' := (x_{1(n_3+1)},...,x_{1n_2})$, $x_1''' := (x_{1(n_2+1)},...,x_{1n_1})$, $x_2 := (x_2',x_2'')$, $x_2' := (x_{21},...,x_{2n_3})$, $x_2'' := (x_{2(n_3+1)},...,x_{2n_2})$,

$$\alpha_b(t) := \frac{e^{bt}-1}{b}, \qquad p_1(t) := \frac{e^{2bt}-1}{2b},$$
$$p_2(t) := \frac{t}{b^2}-\frac{2(e^{bt}-1)}{b^3(e^{bt}+1)}, \qquad p_3(t) := \frac{t}{b^4}+\frac{t^3}{12b^2}-\frac{t^2(e^{bt}+1)}{2b^3(e^{bt}-1)}.$$

Зауважимо, що в оцінках (4) замість $E^{a,b}(t,\tau)$ у випадку слабкого виродження можна брати 1, а коли виродження не дуже сильне, то $E^{a,0}(t,\tau)$.

Функції $\alpha_b(t)$, $p_j(t)$, $t \geq 0$, $j \in \{1,2,3\}$, монотонно зростають, причому $p_j(0) = 0$, $j \in \{1,2,3\}$, і справджуються рівність

$$p_1(\tau) + e^{2b\tau} p_1(t-\tau) = p_1(t), \quad 0 \leq \tau \leq t < \infty, \tag{5}$$

і нерівності

$$p_j(\tau) + p_j(t-\tau) \leq p_j(t), \quad 0 \leq \tau \leq t < \infty, \quad j \in \{2,3\}. \tag{6}$$

Розглянемо функції з [3]

$$k_1(t,a_1) := \frac{c_0 a_1 e^{2bt}}{c_0 - a_l p_l(t)}, \quad k_j(t,a_j) := \frac{c_0 a_j}{c_0 - a_j p_j(t)}, \quad j \in \{2,3\}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

де $c_0 \in (0,c)$, c – стала з оцінок (3), a_1, a_2, a_3 – набір таких невід'ємних чисел, що $p_j(T) < \dfrac{c_0}{a_j}$, $j \in \{1,2,3\}$. Ці функції мають такі властивості:

$$k_j(0,a_j) = a_j,\ k_j(t,a_j) > a_j, \quad t \in (0,T], \quad j \in \{1,2,3\}; \tag{7}$$

$$\begin{gathered} k_1(t-\tau, k_1(\tau,a_1)) = k_1(t,a_1), \qquad k_j(t-\tau, k_j(\tau,a_j)) \leq k_j(t,a_j), \\ 0 \leq \tau \leq t \leq T, \quad j \in \{2,3\}; \end{gathered} \tag{8}$$

$$\begin{gathered} -c_0 \frac{|e^{bt} X_1(t-\tau) - \xi_1|^2}{p_1(t-\tau)} + k_1(\tau,a_1)|\xi_1|^2 \leq k_1(t,a_1)\,|X_1(t)|^2, \\ -c_0 \frac{|X_j(t-\tau) - \xi_j|^2}{p_j(t-\tau)} + k_j(\tau,a_j)|\xi_j|^2 \leq k_j(t,a_j)\,|X_j(t-\tau)|^2, \quad j \in \{2,3\}. \\ 0 \leq \tau \leq t \leq T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n. \end{gathered} \tag{9}$$

Зауважимо, що при доведенні (8) і (9) користовуються (5) і (6).

Скориставшись властивостями α_b, нерівностями (8) і (9) та означенням $X_j(t)$, отримаємо оцінки

$$\begin{gathered} E_{c_0}(t-\tau,x,\xi)\,\Phi_1(\tau,\xi) \leq \exp\{\sum_{j=1}^{3} k_j(t,a_j)|X_j(t-\tau)|^2\} \leq \Psi_1(t,x), \\ 0 \leq \tau < t \leq T,\ \ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \end{gathered} \tag{10}$$

де

$$E_{c_0}(t,x,\xi) := \exp\Bigg\{ -c_0 \,\Bigg(\frac{|e^{bt} X_1(t) - \xi_1|^2}{p_1(t)} + \sum_{l=2}^{3} \frac{|X_l(t) - \xi_l|^2}{p_l(t)} \Bigg)\Bigg\};$$

$$\Phi_\nu(\tau,\xi) := \exp\Big\{ \nu \sum_{l=1}^{3} k_l(\tau,a_l)|\xi_j|^2 \Big\}, \quad \Psi_\nu(t,x) := \exp\Big\{ \nu \sum_{l=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_l} s_{lj}(t)\,|x_{lj}|^2 \Big\},$$

$$\nu \in \mathbb{R}.$$

Тут $s_{lj}(t)$, $l \in \{1,2,3\}$, $j \in \{1,\dots,n_l\}$, ті самі, що й в [3].

Розглянемо функції

$$\hat{k}_1(t,a_1) := \frac{c_0 a_1 e^{2bB(t,0)}}{c_0 - a_1 p_1(B(t,0))}, \quad \hat{k}_j(t,a_j) := \frac{c_0 a_j}{c_0 - a_j p_j(B(t,0))}, \; j \in \{2,3\},$$
$$0 \le t \le T,$$

де a_1, a_2, a_3 – набір таких невід'ємних чисел, що $p_j(B(T,0)) < \dfrac{c_0}{a_j}$, якщо $B(T,0) < \infty$, і $a_j = 0$, якщо $B(T,0) = \infty$, $j \in \{1,2,3\}$;

$$\hat{\Phi}_\nu(\tau,\xi) := \exp\Big\{ \nu \sum_{l=1}^{3} \hat{k}_l(\tau,a_l)|\xi_l|^2 \Big\}, \quad \hat{\Psi}_\nu(t,x) := \exp\Big\{ \nu \sum_{l=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_l} \hat{s}_{lj}(t)\,|x_{lj}|^2 \Big\},$$
$$0 \le \tau \le T, \quad 0 \le t \le T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad \nu \in \mathbb{R},$$

де $\hat{s}_{lj}(t) := s_{lj}(\beta)|_{\beta = B(t,0)}$, $j \in \{1,\dots,n_l\}$, $l \in \{1,2,3\}$.

Зазначимо, що у випадку дуже сильного виродження, тобто коли $B(T,0) = \infty$, маємо $\hat{k}_j(t,a_j) \equiv 0$, $\hat{s}_{lj}(t) \equiv 0$, $\hat{\Phi}_\nu(\tau,\xi) \equiv 1$ і $\hat{\Psi}_\nu(t,x) \equiv 1$.

За допомогою (10) одержуємо оцінки

$$\hat{E}_{c_0}(t,x;\tau,\xi)\,\hat{\Phi}_1(\tau,\xi) \le \exp\{\sum_{j=1}^{3} \hat{k}_j(t,a_j)|X_j(B(t,\tau))|^2\} \le \hat{\Psi}_1(t,x),$$
$$0 \le \tau < t \le T, \;\; \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \tag{11}$$

Користуватимемось нормами

$$\|u(\tau,\cdot)\|^{a,b} := E^{a,b}(T,\tau) \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \Big(|u(\tau,\xi)| \hat{\Phi}_{-1}(\tau,\xi) \Big), \;\; \tau \in (0,T],$$

де a і b – сталі з оцінок (4). Відзначимо, що у випадку дуже сильного виродження

$$\|u(\tau,\cdot)\|^{a,b} := E^{a,b}(T,\tau) \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |u(\tau,\xi)|.$$

2 Інтегральні зображення розв'язків неоднорідного рівняння

Наведемо твердження про інтегральні зображення розв'язків неоднорідного рівняння

$$Lu = f, \tag{12}$$

(де Lu – вираз із (1)), які, як функції x, можуть зростати, а при $t \to 0$ поводяться певним чином залежно від характеру виродження рівняння на початковій гіперплощині.

У наступних теоремах u – неперервний в області $\Pi_{(0,T]}$ розв'язок рівняння (12) з неперервною функцією f, причому u і f задовольняють додаткові умови, вказані у відповідних теоремах; φ – неперервна в $\mathbb{R}^n$ функція така, що $|\varphi(x)| \exp\{-\sum\limits_{l=1}^{3} a_l |x_l|^2\} < \infty$, $x \in \mathbb{R}^n$; G – фундаментальний розв'язок задачі Коші для рівняння (1).

Теорема 1. *Якщо виконуються умови:*

1_1) $A(T,0) < \infty$,

2_1) $\exists\, M > 0 \ \ \forall\, t \in (0,T]: \ \ \|u(t,\cdot)\|^{0,0} \le M$,

3_1) $\lim\limits_{t\to 0} u(t,x) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$,

4_1) $\int\limits_0^T \|f(\tau,\cdot)\|^{0,0} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} < \infty$,

то правильне зображення

$$u(t,x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)d\xi + \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi)\, f(\tau,\xi)\, d\xi, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}. \tag{13}$$

Теорема 2. *Нехай виконуються умови:*

1_2) $A(T,0) = \infty$, $B(T,0) < \infty$,

2_2) $\exists\, M > 0 \ \ \forall\, t \in (0,T]: \ \ \|u(t,\cdot)\|^{a,0} \le M$,

3_2) $\lim\limits_{t\to 0} \Big(u(t,x)\, E^{a,0}(T,t) \Big) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$,

4_2) $\int\limits_0^T \|f(\tau,\cdot)\|^{a,0} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} < \infty$.

Тоді справджується рівність

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_0(t,x;\xi)\varphi(\xi)d\xi + \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi)\, f(\tau,\xi)\, d\xi, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{14}$$

де

$$G_0(t,x;\xi) := \lim_{\tau\to 0} \Big(\, G(t,x;\tau,\xi)\, E^{-a,0}(T,\tau)\, \Big)\,. \tag{15}$$

Теорема 3. *За таких умов:*

1_3) $A(T,0) = \infty$, $B(T,0) = \infty$,

2_3) $\exists\, M > 0 \ \ \forall\, t \in (0,T]: \ \ \|u(t,\cdot)\|^{a,b} \le M$,

3_3) $\lim\limits_{t\to 0} \|u(t,\cdot)\|^{a,b} = 0$,

4_3) $\int\limits_0^T \|f(\tau,\cdot)\|^{a,b} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} < \infty$

є правильною формула

$$u(t,x) = \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi)\, f(\tau,\xi)\, d\xi, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}. \tag{16}$$

Доведення теорем 1–3. Нехай u – розв'язок рівняння (12), який задовольняє умови теорем 1,2 або 3; $V_R := (0,T] \times B_R$, де B_R – куля в просторі $\mathbb{R}^n$ радіуса R з центром у початку координат; ς – нескінченно диференційовна на $(0,\infty)$ функція така, що $\varsigma = 1$ на $[0,1/2]$, $\varsigma = 0$ на $[3/4,\infty)$ і $\varsigma' \le 0$; $\varsigma_R(\xi) := \varsigma(|\xi|/R)$; (t,x) – фіксована точка з $V_{R_0/4}$, де R_0 – задане додатне число. Подібно до [1] отримується формула

$$u(t,x)=\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;h,\xi)\varsigma_R(\xi)u(h,\xi)d\xi-\int\limits_h^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\int\limits_{\mathbb{R}^n} u(\tau,\xi)\,L^*(G(t,x;\tau,\xi)\varsigma_R(\xi))\,d\xi+$$

$$+\int\limits_h^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi)\varsigma_R(\xi))f(\tau,\xi)\,d\xi=:I_1^{(R)}+I_2^{(R)}+I_3^{(R)},\quad 0<h<\frac{t}{2}. \tag{17}$$

Перейдемо в (17) до границі при $R\to\infty$. Маємо

$$\lim_{R\to\infty} I_1^{(R)}=I_1:=\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;h,\xi)u(h,\xi)d\xi,$$

що випливає з оцінок (4) і (11) та нерівностей

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\hat{E}_{c_1}(t,x;\tau,\xi)\prod_{l=1}^{3}\Big(p_l(B(t,\tau))\Big)^{-n_l/2}d\xi\le C,\quad 0<\tau<t\le T,\quad x\in\mathbb{R}^n, \tag{18}$$

і

$$|I_1-I_1^{(R)}|\le$$

$$\le C\,\|u(h,\cdot)\|^{a,b}E^{-a,-b}(T,t)\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B_{R/2}}\hat{E}_c(t,x;h,\xi)\prod_{l=1}^{3}\Big(p_l(B(t,h))\Big)^{-n_l/2}\hat{\Phi}_1(h,\xi)\,d\xi\le$$

$$\le C\,\|u(h,\cdot)\|^{a,b}E^{-a,-b}(T,t)\hat{\Psi}_1(t,x)\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B_{R/2}}\hat{E}_{c-c_0}(t,x;h,\xi)\prod_{l=1}^{3}\Big(p_l(B(t,h))\Big)^{-n_l/2}d\xi\underset{R\to\infty}{\longrightarrow}0. \tag{19}$$

Аналогічно отримуємо, що

$$\lim_{R\to\infty} I_3^{(R)}=I_3:=\int\limits_h^t\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\xi,$$

оскільки

$$|I_3-I_3^{(R)}|\le C\,E^{-a,-b}(T,t)\hat{\Psi}_1(t,x)\times$$

$$\times\int\limits_h^t\|f(\tau,\cdot)\|^{a,b}\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B_{R/2}}\hat{E}_{c-c_0}(t,x;\tau,\xi)\prod_{l=1}^{3}\Big(p_l(B(t,\tau))\Big)^{-n_l/2}d\xi\underset{R\to\infty}{\longrightarrow}0. \tag{20}$$

Для отриманна оцінки $I_2^{(R)}$ скористаємося такими оцінками, аналогічними нерівностям (30) і (32) з [1]:

$$\Big|L^*(G(t,x;\tau,\xi)\varsigma_R(\xi))\Big|\le C\,E^{a,b}(t,\tau)\beta(\tau)\Big(p_1(B(t,\tau))\Big)^{-(n_1+1)/2}\prod_{l=2}^{3}\Big(p_l(B(t,\tau))\Big)^{-n_l/2}\times$$

$$\times\hat{E}_c(t,x;\tau,\xi), \tag{21}$$

$$\hat{E}_{c_1}(t,x;\tau,\xi)\le\exp\Big\{-c_1\frac{(R/4)^2}{q(B(t,h))}\Big\},\quad h\le\tau<t\le T,\quad x\in B_{R_0/4},\quad \xi\in\mathbb{R}^n\setminus B_{R/2}, \tag{22}$$

в яких R – досить велике число, R_0 – фіксоване число, причому $0 < R_0 < R$, $q(t) := \max\limits_{l\in\{1,2,3\}} p_l(t)$.

За допомогою нерівностей (11), (18), (21) і (22) з $c_1 = (c - c_0)/2$ маємо

$$|I_2^{(R)}| \le C \int\limits_h^t E^{a,b}(t,\tau)\Big(p_1(B(t,\tau))\Big)^{-1/2}\frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}\,d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n}\prod_{l=1}^{3}\Big(p_l(B(t,\tau))\Big)^{-n_l/2}\hat{E}_{c-c_0}(t,x;\tau,\xi)\times$$
$$\times\Big(u(\tau,\xi)\hat{\Phi}_{-1}(\tau,\xi)\Big)\Big(\hat{E}_{c_0}(t,x;\tau,\xi))\hat{\Phi}_1(\tau,\xi)\Big)\,d\xi \le$$
$$\le C\hat{\Psi}_1(t,x)E^{-a,-b}(T,t)\exp\Big\{-c_1\frac{(R/4)^2}{q(B(t,h))}\Big\}\int\limits_h^t \Big(p_1(B(t,\tau))\Big)^{-1/2}\|u(\tau,\cdot)\|^{a,b}\,\frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}\,d\tau\times$$
$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n}\prod_{l=1}^{3}\Big(p_l(B(t,\tau))\Big)^{-n_l/2}\hat{E}_{c_1}(t,x;\tau,\xi)\,d\xi \le$$
$$\le C\hat{\Psi}_1(t,x)E^{-a,-b}(T,t)\exp\Big\{-c_1\frac{(R/4)^2}{q(B(t,h))}\Big\}\sup_{\tau\in[h,t]}\|u(\tau,\cdot)\|^{a,b}\times$$
$$\times\int\limits_h^t\frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}\Big(p_1(B(t,\tau))\Big)^{-1/2}d\tau \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{23}$$

оскільки

$$\int\limits_h^t\frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}\Big(p_1(B(t,\tau))\Big)^{-1/2}d\tau \le 2\Big(p_1(B(t,h))\Big)^{-1/2}.$$

Зауважимо, що в оцінках (19), (20) і (23) у випадку виконання умови 1_1) береться $a = 0$, $b = 0$, а умови 1_2) – $b = 0$.

Після переходу в (17) до границі при $R \to \infty$ отримуємо

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;h,\xi)u(h,\xi)d\xi + \int\limits_h^t\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}G(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)\,d\xi =: J_1^{(h)} + J_2^{(h)}. \tag{24}$$

У рівності (24) перейдемо до границі при $h \to 0$. Результат такого переходу залежить від того, яка з умов 1_j), $j \in \{1,2,3\}$, виконується. Використовуватимемо таке твердження, доведене в [1]: для довільно фіксованих $(t,x) \in \Pi_{(0,T]}$ існують такі сталі $C_1 > 0$, $c_1 \in (0, c-c_0)$ і $h_0 \in (0, t/2)$, що для довільних $h \in (0, h_0)$ і $\xi \in \mathbb{R}^n$ справджується нерівність

$$\prod_{l=1}^{3}\Big(p_l(B(t,h))\Big)^{-n_l/2}\hat{E}_{c-c_0}(t,x;h,\xi) \le C_1\prod_{l=1}^{3}\Big(p_l(B(t,t/2))\Big)^{-n_l/2}\hat{E}_{c_1}(t,x;0,\xi) \tag{25}$$

за умови, що $B(T,0) < \infty$.

За допомогою оцінок (4), (11) і (25), умов 2_1) і 2_2) та означення норм у випадку виконання 1_1) і 1_2) відповідно отримуємо

$$\Big|G(t,x;h,\xi)\,u(h,\xi)\Big| \le C_0 \prod_{l=1}^{3}\Big(p_l(B(t,h))\Big)^{-n_l/2}\hat{E}_{c-c_0}(t,x;h,\xi)\times$$
$$\times\Big(|u(h,\xi)|\,\hat{\Phi}_{-1}(h,\xi)\Big)\Big(\hat{E}_{c_0}(t,x;h,\xi)\hat{\Phi}_1(h,\xi)\Big) \le$$
$$\le C_0C_1||u(h,\cdot)||^{0,0}\hat{\Phi}_1(t,x)\prod_{l=1}^{3}\Big(p_l(B(t,t/2))\Big)^{-n_l/2}\hat{E}_{c_1}(t,x;0,\xi) \le$$
$$\le \hat{C}\hat{\Phi}_1(t,x)\prod_{l=1}^{3}\Big(p_l(B(t,t/2))\Big)^{-n_l/2}\hat{E}_{c_1}(t,x;0,\xi) \tag{26}$$

і

$$\Big|G(t,x;h,\xi)\,u(h,\xi)\Big| \le C_0E^{a,0}(t,h)\prod_{l=1}^{3}\Big(p_l(B(t,h))\Big)^{-n_l/2}\hat{E}_{c-c_0}(t,x;h,\xi)\times$$
$$\times\Big(E^{a,0}(T,h)|u(h,\xi)|\,\hat{\Phi}_{-1}(h,\xi)\Big)E^{-a,0}(T,h)\Big(\hat{E}_{c_0}(t,x;h,\xi)\hat{\Phi}_1(h,\xi)\Big) \le$$
$$\le C_0C_1E^{-a,0}(T,t)||u(h,\cdot)||^{-a,0}\hat{\Phi}_1(t,x)\prod_{l=1}^{3}\Big(p_l(B(t,t/2))\Big)^{-n_l/2}\hat{E}_{c_1}(t,x;0,\xi) \le$$
$$\le \hat{C}E^{-a,0}(T,t)\hat{\Phi}_1(t,x)\prod_{l=1}^{3}\Big(p_l(B(t,t/2))\Big)^{-n_l/2}\hat{E}_{c_1}(t,x;0,\xi), \tag{27}$$

де $\hat{C} := C_0C_1M$.

З оцінок (26) і (27) випливає, що підінтегральна функція в інтегралі $J_1^{(h)}$ з (24) має інтегровну мажоранту. Враховуючи умови 3_1) і 3_2), за допомогою теореми Лебега про мажорантну збіжність після переходу до границі при $h \to 0$ під знаком інтеграла в $J_1^{(h)}$ отримаємо перші доданки з формул (13) і (14).

Границя при $h \to 0$ інтеграла в $J_1^{(h)}$ у випадку виконання умови 1_3) дорівнює нулеві, оскільки з огляду на умови 2_3) і 3_3), додатність функції G та рівність (3) маємо

$$|J_1^{(h)}| \le ||u(h,\cdot)||^{a,b}\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;h,\xi)\,d\xi\,E^{-a,-b}(T,h) =$$
$$= E^{a,b}(t,h)\,E^{-a,-b}(T,h)\,||u(h,\cdot)||^{a,b} = E^{-a,-b}(T,t)\,||u(h,\cdot)||^{a,b} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

На підставі умов 4_j), $j \in \{1,2,3\}$, оцінок (4) і (11), рівності (3) і рівності

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\prod_{l=1}^{3}\Big(p_l(B(t,\tau))\Big)^{-n_l/2}\hat{E}_{c-c_0}(t,x;\tau,\xi)\,d\xi = C_2, \quad 0<\tau<t\le T, \quad x\in\mathbb{R}^n,$$

інтеграли $J_2^{(h)}$ при $h \to 0$ прямують до других доданків з формул (13), (14) і (16) відповідно. Справді, розглянемо різницю

$$P^{(h)} := J_2^{(h)} - \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi)\,f(\tau,\xi)\,d\xi = -\int\limits_0^h R(t,\tau,x)\frac{d\tau}{\alpha(\tau)},$$

де

$$R(t,\tau,x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi)\, f(\tau,\xi)\, d\xi.$$

У випадку виконання умови 1_2) маємо

$$|R(t,\tau,x)| \le C_0 E^{a,0}(t,\tau) \int\limits_{\mathbb{R}^n} \prod_{l=1}^{3} \Big(p_l(B(t,\tau))\Big)^{-n_l/2} \hat{E}_{c-c_0}(t,x;\tau,\xi) \times$$
$$\times \Big(\hat{E}_{c_0}(t,x;\tau,\xi)\, \hat{\Phi}_1(\tau,\xi)\Big) \Big(|f(\tau,\xi)|\, \hat{\Phi}_{-1}(\tau,\xi)\, E^{a,0}(T,\tau)\Big)\, E^{-a,0}(T,\tau)\, d\xi \le$$
$$\le C_0 E^{-a,0}(T,t)\, ||f(\tau,\cdot)||^{a,0}\, \hat{\Phi}_1(t,x) \int\limits_{\mathbb{R}^n} \prod_{l=1}^{3} \Big(p_l(B(t,\tau))\Big)^{-n_l/2} \hat{E}_{c-c_0}(t,x;\tau,\xi)\, d\xi \le$$
$$\le C_0\, C_2\, E^{-a,0}(T,t)\, \hat{\Phi}_1(t,x)\, ||f(\tau,\cdot)||^{a,0}$$

і на підставі умови 4_2) отримуємо

$$|P^{(h)}| \le C_0\, C_2\, E^{-a,0}(T,t)\, \hat{\Phi}_1(t,x) \int\limits_0^h ||f(\tau,\cdot)||^{a,0} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0. \qquad (28)$$

Якщо виконується умова 1_1), то правильне зображення (28) з $a = 0$. У випадку, коли виконується умова 1_3), маємо

$$|P^{(h)}| \le \int\limits_0^h \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi) \Big(E^{a,b}(T,\tau)\, |f(\tau,\xi)|\Big)\, E^{-a,-b}(T,\tau)\, d\xi \le$$
$$\le \int\limits_0^h ||f(\tau,\cdot)||^{a,b} E^{a,b}(t,\tau)\, E^{-a,-b}(T,\tau) \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} =$$
$$= E^{-a,-b}(T,t) \int\limits_0^h ||f(\tau,\cdot)||^{a,b} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Отже, теореми 1–3 доведено.

□

3 Висновки

У наведених теоремах установлено інтегральне зображення розв'язків неоднорідного рівняння (12). Розглянуті розв'зки, як функції x, можуть необмежено зростати при $|x| \to \infty$, а при $t \to 0$ поводяться певним чином залежно від характеру виродження рівняння на початковій гіперплощині. Зазначимо, що у випадку дуже сильного виродження розглядувані розв'язки є обмеженими функціями від x. Ці результати можуть використовуватися для встановлення коректної розв'язності рівняння (12) з класичною початковою умовою у випадку слабкого виродження рівняння при $t = 0$, ваговою початковою умовою або без початкової умови, якщо виродження сильне.

Список літератури

[1] Івасишен С. Д., Пасічник Г. С. *Ультрапараболічні рівняння з необмежено зростаючими коефіцієнтами в групі молодших членів і виродженнями на початковій гіперплощині.* Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2018. **61** (1), 31–46; Те саме: S. D. Ivasyshen, H. S. Pasichnyk *Ultraparabolic Equations with Infinitely Increasing Coefficients in the Group of Lowest Terms and Degenerations in the Initial Hyperplane* J. Math. Sci. 2020. **249** (3), 333-354. doi:https://doi.org/10.1007/s10958-02-04946-3

[2] Івасишен С.Д., Мединський І.П., Пасічник Г.С. *Параболічні рівняння з виродженнями на початковій гіперплощині.* Буковинський мат. журн. 2016. **4** (3–4), 57–68.

[3] Івасишен С., Пасічник Г. *Задача Коші для одного параболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами в групі молодших членів.* Мат. вісн. Наук. тов. ім. Т. Шевченка. 2014. **11**, 73–87.

Список літератури

[1] Ivasyshen S. D., Pasichnyk H. S. *Ultraparabolic Equations with Infinitely Increasing Coefficients in the Group of Lowest Terms and Degenerations in the Initial Hyperplane* J. Math. Sci. 2020. **249** (3), 333-354. doi:https://doi.org/10.1007/s10958-02-04946-3

[2] Ivasyshen S. D., Medyns'kyi I.P., Pasichnyk H. S. *Parabolic Equations with degenerations on initial hyperplane* Bukovinian. Math. J. 2016. **4** (3–4), 57–68. (in Ukrainian)

[3] Ivasyshen S., Pasichnyk H. *The Cauchy problem for paraboic equation with growing lowest coefficients* Math. Bulletin of the Shevchenko scientific society. 2014. **11**, 73–87. (in Ukrainian)

Надійшло 29.03.2021

Ivasyshen S. D., Pasichnyk H. S. *Representation of solutions of Kolmogorov type equations with increasing coefficients and degenerations on the initial hyperplane*, Bukovinian Math. Journal. **9**, 1 (2021), 189–199.

The nonhomogeneous model Kolmogorov type ultraparabolic equation with infinitely increasing coefficients at the lowest derivatives as $|x| \to \infty$ and degenerations for $t = 0$ is considered in the paper. Theorems on the integral representation of solutions of the equation are proved. The representation is written with the use of Poisson integral and the volume potential generated by the fundamental solution of the Cauchy problem. The considered solutions, as functions of x, could infinitely increase as $|x| \to \infty$, and could behave in a certain way as $t \to 0$, depending on the type of the degeneration of the equation at $t = 0$. Note that in the case of very strong degeneration, the solutions, as functions of x, are bounded. These results could be used to establish the correct solvability of the considered equation with the classical initial condition in the case of weak degeneration of the equation at $t = 0$, weight initial condition or without the initial condition if the degeneration is strong.