Зарічний М. М.

ФУНКТОРИ І ПРОСТОРИ В ІДЕМПОТЕНТНІЙ МАТЕМАТИЦІ

Ідемпотентна математика досліджує об'єкти, у яких деякі арифметичні операції замінені ідемпотентними. Зокрема, поняття ймовірнісної міри має свої ідемпотентні аналоги. Наведено огляд результатів у цьому напрямку. Формулюються деякі відкриті проблеми.

Ключові слова і фрази: Ідемпотентна математика, ідемпотентна міра, max-min міра.

Львівський національний університет імені Івана Франка
e-mail: *zarichnyi@yahoo.com*

Світлій пам'яті Володимира Маслюченка

1 Вступ

Ідемпотентна математика – це розділ математики, у якому центральну роль відіграють ідемпотентні операції (наприклад max). В останні десятиліття спостерігаємо інтенсивні дослідження у цьому напрямку. Серед обширної літератури періоду становлення ідемпотентної математики відзначимо статтю [26], з якої можна скласти уявлення про мотивації та використовувані методи.

Принцип відповідності полягає в тому, що кожному змістовному поняттю чи результатові традиційної математики відповідає змістовне поняття чи результат ідемпотентної математики.

Методи ідемпотентної математики знаходять застосування у задачах оптимізації, динамічному програмуванні, математичній економіці, теорії ігор, математичній біології та інших дисциплінах (див., наприклад, [18] і цитовану там літературу).

Нижче наведено огляд результатів, що стосуються ідемпотентних аналогів поняття ймовірнісної міри та опуклості. Формулюються деякі відкриті проблеми у цій тематиці.

УДК 515.12
2010 *Mathematics Subject Classification:* Primary 26A21; Secondary 54C50.

2 Ідемпотентні міри і max-min міри

Для компактного гаусдорфового простору X, через $C(X)$ позначаємо банаховий простір неперервних дійснозначних функцій на X (відносно sup-норми). Якщо $\varphi, \psi \in C(X)$, то через $\varphi \vee \psi$ (відповідно $\varphi \wedge \psi$) позначаємо поточковий максимум (відповідно мінімум) функцій φ і ψ. Якщо $c \in \mathbb{R}$, то через $c \vee \varphi$ (відповідно $c \wedge \varphi$) позначаємо поточковий максимум (відповідно мінімум) функції φ і сталої c.

Для кожного $c \in \mathbb{R}$ позначимо через c_X функцію на X, що тотожньо рівна c.

Продемонструємо принцип відповідності на прикладі поняття ідемпотентної міри. Приймемо $\mathbb{R}_{\max} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Нехай X — компактний гаусдорфовий простір. Функціонал $\mu\colon C(X) \to \mathbb{R}$ називається *ідемпотентною мірою* на X, якщо:

1. $\mu(c_X) = c$ для кожного $c \in \mathbb{R}$;
2. $\mu(\varphi \vee \psi) = \mu(\varphi) \vee \mu(\psi)$ для всіх $\varphi, \psi \in C(X)$;
3. $\mu(c \odot \varphi) = c \odot \mu(\varphi)$ для всіх $c \in \mathbb{R}$ і всіх $\varphi \in C(X)$.

Відповідно до традицій ідемпотентної математики через $\odot$ позначається додавання. Ідемпотентні міри ще називають мірами Маслова. Прикладом ідемпотентної міри зі скінченними носіями є ідемпотентна комбінація мір Дірака: $\bigvee_{i=1}^{n} \lambda_i \odot \delta_{x_i}$, де $\lambda_i \in \mathbb{R}_{\max}$, $\bigvee_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$.

Простір $I(X)$ усіх ідемпотентних мір на X наділяється слабкою* топологією. В [14] доведено, що I — функтор в категорії компактних гаусдорфових просторів, який є нормальним у сенсі Є.В. Щепіна [23]. Його властивості багато в чому нагадують властивості функтора P ймовірнісних мір. Доведено, що цей функтор відкритий, тобто зберігає клас відкритих сюр'єктивних відображень. Зауважимо, що доведення відкритості проходить з використанням ідемпотентного аналога відображення Мілютіна; використовується аналог конструкції, описаної в [1].

Спорідненим до поняття ідемпотентної міри є поняття max-min міри. Функціонал $\mu\colon C(X) \to \mathbb{R}$ називається *max-min мірою* на X, якщо:

1. $\mu(c_X) = c$ для кожного $c \in \mathbb{R}$;
2. $\mu(\varphi \vee \psi) = \mu(\varphi) \vee \mu(\psi)$ для всіх $\varphi, \psi \in C(X)$;
3. $\mu(c \wedge \varphi) = c \wedge \mu(\varphi)$ для всіх $c \in \mathbb{R}$ і всіх $\varphi \in C(X)$.

Простори $J(X)$ всіх max-min мір на X наділяються слабкою* топологією.

Спільний підхід до опису топології просторів $I(X)$ та $J(X)$ описано в [9]. Зокрема, там наведено зображення елементів просторів $I(X)$ та $J(X)$ як компактних підмножин у конусі над простором X.

Функтори P та I не ізоморфні, однак простори $P(X)$ та $I(X)$ гомеоморфні для всіх метричних компактів X (див. [5]). Зокрема, простори $P(X)$ та $I(X)$ гомеоморфні n-вимірному симплексові, якщо $|X| = n - 1$, і гомеоморфні гільбертовому кубові, якщо X — нескінченний компакт.

Один з результатів статті [5] стосується відображень. Доведено, що якщо X, Y — компактні метричні простори і $p_1\colon X \times Y \to X$ означає проєктування на перший співмножник, то відображення $I(p_1)\colon I(X \times Y) \to I(X)$ м'яке.

У неметризовному випадку доведено, що простір $I([0,1]^\tau)$ не є абсолютним ретрактом при $\tau > \omega_1$.

У [5] показано також, що якщо X — відкритопороджений однорідний за характером компактний гаусдорфовий простір ваги ω_1, то простір $I(X)$ гомеоморфний $[0,1]^{\omega_1}$.

Використовуючи спектральну техніку, яку розробив Є.В. Щепін [23], Т. Радул [31] показав, що простір $I(X)$ є абсолютним ретрактом тоді і лише тоді, коли X є відкритопородженим компактним гаусдорфовим простором ваги $\leq \omega_1$.

Деякі гомотопійні та шейпові властивості підпросторів ідемпотентних мір описано в [40].

Відкритою залишається проблема гомеоморфності просторів $P(X)$ та $I(X)$ для кожного компактного гаусдорфового простору X.

2.1 Монади і алгебри

Розглянуті вище функтори ідемпотентних мір і max-min мір породжують монади в категорії компактних гаусдорфових просторів. Нагадаємо, що монада на категорії $\mathcal{C}$ — це трійка $\mathbb{T} = (T, \eta, \mu)$, що складається з функтора $T\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ та природних перетворень $\eta\colon 1_{\mathcal{C}} \to T$ (одиниця) та $\mu\colon T^2 \to T$ (множення), що задовольняють умови асоціативності та двосторонності одиниці.

У випадку функтора I структура монади задається природними перетвореннями $\delta\colon 1 \to I$ та $\psi\colon I^2 \to I$, де $\delta_X\colon x \to \delta_x$ — природне вкладення, а відображення $\psi_X\colon I^2(X) \to I(X)$ на всюди щільній підмножині в $I^2(X)$ означене умовою: $\psi_X(\vee_{i=i}^n \alpha_i \odot \delta_{\mu_i}) = \vee_{i=i}^n \alpha_i \odot \mu_i$.

Подібно задається структура монади для функтора max-min мір. Зауважимо, що монади, породжені функторами ідемпотентних мір і max-min мір не ізоморфні.

З кожною монадою $\mathbb{T} = (T, \eta, \mu)$ пов'язане поняття $\mathbb{T}$-алгебри. Так називають пару (X, ξ), де $\xi\colon T(X) \to X$ — морфізм, для якого $\xi\eta_X = 1_X$, $\xi\mu_X = \xi T(\xi)$. Нижче ми побачимо, що алгебри для монади ідемпотентних мір тісно пов'язані з опуклістю.

Деякі результати, пов'язані з алгебраїчними аспектами опуклості, функторів ідемпотентних мір та споріднених функторів, можна знайти у статті [29].

Потреби теорії ринкової рівноваги привели до розгляду ідемпотентних версій ігор у змішаних стратегіях, тобто у стратегіях зі значеннями у просторах ймовірнісних мір. Для таких версій у статті [34] доведено теорему існування рівноваги Неша.

2.2 Метризація

Нехай (X, d) — метричний простір. Відомо, що на просторі ймовірнісних мір $P(X)$ можна означити природну метрику [25]. Для простору $I(X)$ в [5] запропоновано таку конструкцію. Для кожного натурального n нехай $\mathrm{Lip}_n(X)$ означає множину всіх ліпшицевих функцій на X зі сталою Ліпшиця $\leq n$. Для кожних $\mu, \nu \in I(X)$ нехай

$$\hat{d}_n(\mu, \nu) = \sup\{|\mu(\varphi) - \nu(\varphi)| : \varphi \in \mathrm{Lip}_n(X)\}.$$

Функції $\hat{d}_n$ є неперервними псевдометриками на просторі X, а функція

$$(\mu, \nu) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(\mu, \nu)}{2^n}$$

є метрикою на X, що індукує слабку* топологію. При такій метризації відображення $x \mapsto \delta_x$ є ізометричним вкладенням, а відображення множення монади $\psi_X \colon I^2(X) \to I(X)$ — нерозтягуючим відображенням.

У статті [41] запропоновано інший підхід до метризації просторів $I(X)$. Він є ідемпотентним аналогом метризації Канторовича [25] просторів ймовірнісних мір.

Нехай (X, d) — метричний простір, такий що $\mathrm{diam}(X) \leq 1$. Через $\mathrm{Cone}(X)$ позначаємо конус над X, наділений метрикою $\check{d}$:

$$\check{d}((x, s), (y, t)) = \min\{s, t\} d(x, y) + |s - t|.$$

Підмножину K в $\mathrm{Cone}(X)$ назвемо насиченою, якщо $(x, t) \in K \implies (x, t') \in K$ для кожного $t' \in [0, t]$.

Нехай

$$\bar{J}(X) = \{A \in \exp(\mathrm{Cone}(X)) \mid A \text{ насичена і } (x, 1) \in A \text{ для деякого } x \in X\}.$$

У [9] доведено, що простір $\bar{J}(X)$ (як підпростір гіперпростору $\exp(\mathrm{Cone}(X))$) природно гомеоморфний просторам $J(X)$ та $I(X)$. Це дозволяє використати метрику Гаусдорфа на $\bar{J}(X)$ для метризації просторів $J(X)$ та $I(X)$.

Для такої метризації можна розглянути нескінченні ітерації функторів I та J в сенсі [13] для компактних метричних просторів діаметра ≤ 1. Відкритою проблемою є опис топології одержаних трійок просторів.

Природно виникає також таке питання: чи існує ідемпотентний аналог метрики Прохорова (див. [30])?

Досліджувалося також питання розмитої метризації просторів ідемпотентних мір і max-min мір. Нагадаємо деякі необхідні означення. *Трикутною нормою* називається неперервне відображення $*\colon [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$, яке є асоціативним, комутативним, монотонним та для якого 1 є нейтральним елементом. Трійка $(X, M, *)$ називається *розмитим метричним простором* (у сенсі [15]), якщо X — довільна множина, $*$ — трикутна норма і $M \colon X \times X \times (0, \infty) \to [0, 1]$ — функція, що задовольняє умови для всіх $x, y, z \in X$ і $s, t \in (0, \infty)$:

(1) $M(x, y, t) > 0$;

(2) $M(x, y, t) = 1$ тоді і лише тоді, коли $x = y$;

(3) $M(x, y, t) = M(y, x, t)$;

(4) $M(x,y,t) * M(y,z,s) \le M(x,z,t+s)$;

(5) функція $M(x,y,\cdot)\colon (0,\infty) \to [0,1]$ неперервна.

Якщо $(X,M,*)$ — розмитий метричний простір, то пара $(M,*)$ називається розмитою метрикою на множині X. Відомо, що розмиті метрики породжують метризовні топології.

Розмита метризація відома для гіперпросторів [35] та просторів ймовірнісних мір [27]. У статті [8] запропоновано розмиту метризацію просторів ідемпотентних мір та max-min мір на компактних розмитих метричних просторах. При цьому кожна ідемпотентна міра ототожнюється з підграфіком своєї густини і на одержаній підмножині гіперпростору розглядається метрика Гаусдорфа. Аналогічна конструкція застосовується до max-min мір.

2.3 Ультраметричні простори

Нагадаємо, що метрика d на множині X називається ультраметрикою, якщо d задовольняє сильну нерівність трикутника

$$d(x,y) \le \max\{d(x,z), d(z,y)\}.$$

Метризація простору ідемпотентних мір з компактними носіями на ультраметричному просторі X запропонована в [24]. Нехай $r > 0$. Позначимо через $\mathcal{F}_r(X)$ множину дійснозначних функцій на X, сталих на всіх кулях радіуса r. Для $\mu, \nu \in I(X)$ приймемо

$$\hat{d}(\mu,\nu) = \inf\{r > 0 \mid \mu(\varphi) = \nu(\varphi) \text{ для всіх } \varphi \in \mathcal{F}_r(X)\}.$$

В [24] показано, що $\hat{d}$ є ультраметрикою на множині $I(X)$. Зауважимо, що ця конструкція є ідемпотентним аналогом метрики на просторах ймовірнісних мір на ультраметричних просторах [38]. У [24] доведено, що така метризація породжує функтор у категорії ультраметричних просторів та нерозтягуючих відображень. Цей функтор зберігає повноту. Зауважимо також, що носії ідемпотентних мір неперервні у цій метризації. Аналогічні результати для функтора max-min мір з компактними носіями доведено в статті [10].

Поняття розмитого ультраметричного простору є відповідником поняття ультраметричного простору у теорії розмитих метричних просторів. Для трикутної норми $* = \min$ розмита метрика $(M,*)$ називається розмитою ультраметрикою [21], якщо вона задовольняє таке посилення умови (4): $M(x,y,t) * M(y,z,s) \le M(x,z,\max\{t,s\})$. Відомо, що остання умова еквівалентна умові: $M(x,y,t) * M(y,z,t) \le M(x,z,t)$.

У статті [17] запроваджено розмиту ультраметризацію множини всіх ідемпотентних мір на розмитому ультраметричному просторі. Розглянуто властивість повноти одержаних розмитих метричних просторів. Зауважимо, що цей результат має відповідник у стандартній математиці: розмиту ультраметризацію просторів ймовірнісних мір на розмитому ультраметричному просторі побудовано в [36].

2.4 Гіперпростори опуклих множин

Гіперпростори опуклих множин є предметом дослідження у багатьох публікаціях. Зокрема їм присвячено монографію [4].

Поняття max-плюс опуклої множини у евклідовому просторі означено в [11]. Кажемо, що множина $A \subset \mathbb{R}^n$ max-плюс опукла, якщо $x \vee (\alpha \odot y) \in A$ для кожних $x, y \in A$ і $\alpha \in [-\infty, 0]$. Зауважимо, що версію цього поняття розглянуто в [7] — там автори використовували множення на $t \in [0, 1]$ замість операції додавання.

У [2] доведено, що гіперпростір max-плюс опуклих підмножин у кубі $[0, 1]^n$ при $n \geq 2$ гомеоморфний гільбертовому кубові. Це можна розглядати як ідемпотентний аналог теореми Надлера, Квінна і Ставрокаса [22]. Для max-min опуклих множин аналогічні результати одержано в [3].

У статті [6] розглянуто некомпактний випадок. Доведено, що гіперпростір max-плюс опуклих компактних підмножин у степені $\mathbb{R}^\tau$ гомеоморфний $\mathbb{R}^\tau$ для $\tau \in \{\omega, \omega_1\}$. При $\tau > \omega_1$ цей гіперпростір не є абсолютним ретрактом.

Max-плюс аналог класичної теореми Майкла про селекцію з опуклими образами доведено в [39] (див. також [31]).

Для ідемпотентних мір у евклідових просторах (більш загально, у max-плюс опуклих множинах) можна означити відображення барицентра. Барицентром ідемпотентної міри $\mu = \bigvee_{i=1}^n \lambda_i \odot \delta_{x_i}$ є елемент $\beta_X(\mu) = \bigvee_{i=1}^n \lambda_i \odot x_i$.

Нехай $J = \{(p, q) \in \mathbb{R}_{\max} \mid p \vee q = 0\}$. У статті [33] Т. Радул довів, що відображення барицентра для max-плюс опуклого компакта X відкрите тоді і лише тоді, коли відкрите відображення

$$s_X \colon X \times J \to X, \;\; s_X(x, y, p, q) = (p \odot x) \vee (q \odot y).$$

Більш того, у роботі [33] показано, що відображення барицентра, обмежене на прообраз множини точок неоднозначності, є тривіальним розшаруванням з шаром гільбертів куб при умові, що це відображення відкрите.

Оскільки простір $I(X)$ має природну структуру max-плюс опуклого компакта, то можна говорити про відображення барицентра $\beta_{I(X)} \colon I^2(X) \to I(X)$. У [32] показано, що відображення $\beta_{I(X)}$ відкрите для кожного компактного гаусдорфового простору X.

У [31] доведено, що відображення $\beta_{I([0,1]^{\omega_1}}$ не є 0-м'яким відображенням. Зауважимо, що ця ситуація відрізняється від випадку барицентричних відображень ймовірнісних мір [12].

Компактні опуклі простори у локально опуклих просторах та їх афінні відображення тісно пов'язані з поняттям алгебри монади ймовірнісних мір (див. [28]). При цьому відображення барицентра для опуклого компактна виступає як структурне відображення алгебри. Відкритою проблемою є встановлення аналогів результатів статті [28] для функторів ідемпотентних і max-plus мір.

Геометрію трійок нескінченних ітерацій функтора гіперпростору компактних max-плюс опуклих множин описано в [37]. Відкритим залишається питання існування такого опису для випадку max-min опуклих множин.

2.5 Інваріантні ідемпотентні міри

Поняття інваріантної ймовірнісної міри для заданої ітерованої системи стискуючих відображень компактного (більш загально, повного) метричного простору означене в [16]. Доведено, що інваріантна міра існує і єдина, у доведенні використовується теорема Банаха про нерухому точку. Зауважимо при цьому, що метрика на просторі ймовірнісних мір, запропонована в [16], насправді збігається з метрикою Канторовича.

Поняття інваріантної ідемпотентної міри для ітерованої системи відображень компактних метричних просторів запропоноване в [19]. Зауважимо, що в [19] метод доведення існування і єдиності інваріантної ідемпотентної міри не використовує теореми Банаха про нерухому точку. Він також дозволяє одержати аналогічний результат для max-min мір.

Ультраметрична версія теореми єдиності та існування інваріантної ідемпотентної міри встановлена в [20].

Список літератури

[1] Ageev S., Tymchatyn E.D. *On exact atomless Milutin maps.* Topology Appl., 2005, **153**, 227–238.

[2] Bazylevych L. E. *Hyperspaces of max-plus convex compact sets.* Mat. Zametki, 2008, **84** (5), 658–666.

[3] Bazylevych L. E. *Hyperspaces of max-plus and max–min convex sets.* Trav. Math., 2008, **18**, 103–110.

[4] Beer G. Topologies on Closed and Closed Convex Sets, Kluwer Academic, Dordrecht, 1993.

[5] Bazylevych L., Repovš D., Zarichnyi M. *Spaces of idempotent measures of compact metric spaces.* Topology Appl., 2010, **157**, 136–144.

[6] Bazylevych L., Repovš D., Zarichnyi M. *Hyperspaces of max-plus convex subsets of powers of the real line.* J. Math. Anal. Appl., 2012, **394** (2), 481–487.

[7] Briec W., Horvath C. *$\mathbb{B}$-convexity.* Optimization, 2004, **53** (2), 103–127. DOI: 10.1080/02331930410001695283

[8] Brydun V., Savchenko A., Zarichnyi M. *Fuzzy metrization of the spaces of idempotent measures.* Eur. J. Math., 2020, **6** (1), 98–109.

[9] Brydun V., Zarichnyi M. *Spaces of max-min measures on compact Hausdorff spaces.* Fuzzy Sets and Systems, 2020, **396**, 138–151.

[10] Cencelj M., Repovš D., Zarichnyi M. *Max-min measures on ultrametric spaces.* Topology Appl., 2013, **160** (5), 673–681.

[11] Cohen G., Gaubert S., Quadrat J., Singer, I. *Max-plus convex sets and functions*, In: Litvinov, G.L., Maslov, V.P. (eds.): Idempotent Mathematics and Mathematical Physics. Contemporary Mathematics. American Mathematical Society, pp. 105–129. Також: ESI Preprint 1341, arXiv:math.FA/0308166 (2005)

[12] Fedorchuk V.V. *On barycentrically open bicompacta.* Sib. Math. J., 1992, **33**, 1135—1139.

[13] Fedorchuk V.V. *Triples of infinite iterations of metrizable functors.* Proceedings of the USSR Academy of Sciences Mathematics series, 1990, **54** (2), 396–417.

[14] Zarichnyi M. *Spaces and maps of idempotent measures.* Izv. Math., 2010, **74** (3), 481—499.

[15] George A., Veeramani P. *On some result in fuzzy metric spaces.* Fuzzy Sets and Systems, 1994, **64**, 395–399.

[16] Hutchinson J. E. *Fractals and self similarity.* Indiana Univ. Math. J., 1981, **30** (5), 713—747. doi:10.1512/iumj.1981.30.30055

[17] Li C., Yang Zh. *Fuzzy Ultrametrics Based on Idempotent Probability Measures.* The Journal of Fuzzy Mathematics. 2014, **22**, (2), 463–476.

[18] Litvinov G. L. *The Maslov dequantization, idempotent and tropical mathematics: a brief introduction.* J. Math. Sci., 2007, **140**, (3), 426–444. Also: arXiv:math.GM/0507014

[19] Mazurenko N., Zarichnyi M. *Invariant idempotent measures.* Carpathian Math. Publ., 2018. **10** (1), 172–178.

[20] Mazurenko N., Zarichnyi M. *Idempotent ultrametric fractals.* Visnyk of Lviv University. Mechanical and mathematical series, 2014, **79**, 111—118.

[21] Miheţ D. *Fuzzy ψ-contractive mappings in non-Archimedean fuzzy metric spaces.* Fuzzy Sets and Systems, 2008, **159**, (6), 739—744.

[22] Nadler S. B., Quinn J., Stavrakas N. M. *Hyperspaces of compact convex sets.* Pacific J. Math., 1979, **83** (2), 441–462.

[23] Shchepin E.V. *Functors and uncountable powers of compacta.* Uspekhi Mat. Nauk, 1981, **31**, 3–62.

[24] Hubal O., Zarichnyi M. *Idempotent probability measures on ultrametric spaces.* J. Math. Anal. Appl., 2008, **343**, 1052–1060.

[25] Kantorovich L. V., Rubinshtein G. Sh. *About one functional space and some extreme problems.* Reports of the USSR Academy of Sciences, 1957, **115** (6), 1058–1061.

[26] Litvinov G. L., Maslov V. P., Shpiz G. B. *Idempotent functional analysis. Algebraic approach.* Mathematical notes, 2001, **69** (5), 758–797.

[27] Repovš D., Savchenko A., Zarichnyi M. *Fuzzy Prokhorov metric on the set of probability measures* Fuzzy Sets and Systems, 2011, **175**, (1), 96–104.

[28] Świrszcz T. *Monadic functors and convexity.* Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys., 1974 **22**, 39–42.

[29] Nykyforchyn O., Repovš D. *Idempotent Convexity and Algebras for the Capacity Monad and its Submonads.* Appl. Categor. Struct., 2011, **19**, 709—727. https://doi.org/10.1007/s10485-010-9229-9

[30] Prohorov Yu. V. *Convergence of random processes and limit theorems of probability theory.* Probability theory and its application, 1956, **1** (2), 177—238.

[31] Radul T. *Idempotent measures: absolute retracts and soft maps.* Topol. Methods Nonlinear Anal., 2020, **56** (1), 161–172. https://doi.org/10.12775/TMNA.

[32] Radul T. *On the openness of the idempotent barycenter map.* Topology Appl., 2019, **265**, 106809, 10 pp. https://doi.org/10.1016/j.topol.2019.07.003

[33] Radul T. M. *Fibration of idempotent measures.* Ukr. Math. J., 2020, **72** (11).

[34] Radul T. *Equilibria for games in idempotent measures.* ESAIM Proceedings and Surveys, 2017, **57**, 64–69. DOI: 10.1051/proc/201657064

[35] Rodríguez-López J., Romaguera S. *The Hausdorff fuzzy metric on compact sets.* Fuzzy Sets and Systems, 2004, **147**, 273–283.

[36] Savchenko A., Zarichnyi M. *Probability Measure Monad on the Category of Fuzzy Ultrametric Spaces.* Azerb. J. Math., 2011, **1** (1), 114–121.

[37] Savchenko A., Zarichnyi M. *Triples of infinite iterations of hyperspaces of max-plus compact convex sets.* Proc. Int. Geom. Center, 2016. **9** (2), 24–31.

[38] Vink E. P. de, Rutten J. J. M. M. *Bisimulation for probabilistic transition systems: A coalgebraic approach.* Theoret. Comput. Sci., 1999, **221** (1/2), 271–293.

[39] Zarichnyi M. *Michael selection theorem for max-plus compact convex sets.* Topology Proceedings, 2007, **31**, 677–681.

[40] Zaitov A. A., Ishmetov A. Ya. *Homotopy properties of space $I_f(X)$ of idempotent probability measures.* Mathematical notes, 2019, **106** (4), 531–542.

[41] Zaitov A. A. *On a metric on the space of idempotent probability measures.* Appl. Gen. Topol., 2020, **21** (1), 35–51.

Надійшло 26.03.2021

Zarichnyi M. M., *Functors and spaces in idempotent mathematics*, Bukovinian Math. Journal. **9**, 1 (2021), 171–179.

Idempotent mathematics is a branch of mathematics in which idempotent operations (for example, max) on the set of reals play a central role. In recent decades, we have seen intensive research in this direction.

The principle of correspondence (this is an informal principle analogous to the Bohr correspondence principle in the quantum mechanics) asserts that each meaningful concept or result of traditional mathematics corresponds to a meaningful concept or result of idempotent mathematics. In particular, to the notion of probability measure there corresponds that if Maslov measure (also called idempotent measure) as well as more recent notion of max-min measure. Also, there are idempotent counterparts of the convex sets; these include the so-called max-plus and max min convex sets.

Methods of idempotent mathematics are used in optimization problems, dynamic programming, mathematical economics, game theory, mathematical biology and other disciplines.

In this paper we provide a survey of results that concern algebraic and geometric properties of the functors of idempotent and max-min measures.

Key words and phrases: Idempotent mathematics, idempotent measure, max-min measure