Заболоцький М.В.[1], Галь Ю.М.[2], Мостова М.Р.[1]

# ЛОГАРИФМІЧНА ПОХІДНА ДОБУТКУ БЛЯШКЕ З ПОВІЛЬНО ЗРОСТАЮЧОЮ ЛІЧИЛЬНОЮ ФУНКЦІЄЮ НУЛІВ

Нехай $z_0 = 1$ єдина гранична точка нулів $(a_n)$ добутку Бляшке $B(z)$; $\Gamma_m = \bigcup\limits_{j=1}^{m}\{z : |z| < 1, \arg(1-z) = -\theta_j\} = \bigcup\limits_{j=1}^{m} l_{\theta_j}$, $-\pi/2+\eta < \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_m < \pi/2-\eta$, – скінченна система променів, $0 < \eta < 1$; $\upsilon(t)$ – неперервна на $[0,1)$, $\upsilon(0) = 0$, повільно зростаюча в точці 1 функція, тобто $\upsilon(t) \sim \upsilon\left((1+t)/2\right)$, $t \to 1-$; $n(t,\theta_j;B)$ – кількість нулів $a_n = 1 - r_n e^{i\theta_j}$ добутку $B(z)$ на промені $l_{\theta_j}$ таких, що $1 - r_n \le t$, $0 < t < 1$. За умови розташування нулів $B(z)$ на $\Gamma_m$ і виконання співвідношень $n(t,\theta_j;B) \sim \Delta_j \upsilon(t)$, $t \to 1-$, для кожного $j = \overline{1,m}$, $0 \le \Delta_j < +\infty$, знайдено асимптотику логарифмічної похідної $B(z)$ при $z = 1 - re^{-i\varphi} \to 1$, $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$, $\varphi \ne \theta_j$. Також для таких $B(z)$ розглядається обернена задача.

*Ключові слова і фрази:* логарифмічна похідна, добуток Бляшке, повільно зростаюча функція.

[1]Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, Ukraine
[2]Drohobych Ivan Franko State Pedagogical University, Drohobych, Ukraine
e-mail: *mykola.zabolotskyy@lnu.edu.ua, yuriyhal@gmail.com, mariana.mostova@gmail.com*

## Вступ

Нехай $(a_n)$ – послідовність чисел з $\mathbb{C}$ таких, що $0 < |a_1| \le |a_2| \le \ldots \le |a_n| \le \ldots < 1$ і $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(1-|a_n|) < +\infty$. Тоді функція вигляду

$$B(z) = \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{\overline{a}_n}{|a_n|} \cdot \frac{a_n - z}{1 - \overline{a}_n z}$$

називається добутком Бляшке і є аналітичною в крузі $\mathbb{D} = \{z\colon |z| < 1\}$ функцією. Добутки Бляшке є важливим підкласом аналітичних в $\mathbb{D}$ функцій з обмеженою характеристикою Неванлінни. Зауважимо ([2, с. 81]), що добуток $B$ є мероморфною в $\mathbb{C}$ функцією за винятком точок скупчення нулів $B$. В [8] для добутку Бляшке з додатними нулями, лічильна функція $n(t) = n(t,B)$ яких є повільно зростаючою в точці 1, знайдено асимптотику $\ln B\left(1 - re^{-i\varphi}\right)$ $(-\pi/2 < \varphi < \pi/2)$ при $r \to 0+$.

УДК 517.53
2010 *Mathematics Subject Classification:* 30D15, 30D35, 30J10.

Асимптотика та оцінки логарифмічної похідної мероморфних функцій зовні винятткових множин відіграють важливу роль в різних галузях математики, зокрема в неванліннівській теорії розподілу значень (див., наприклад, [3, 5, 6]) та аналітичній теорії диференційних рівнянь ([1, 7]).

В даній роботі вивчаємо асимптотику логарифмічної похідної добутку Бляшке $B$ з єдиною точкою скупчення нулів на $\partial\mathbb{D}$ за умови, що $n(t, B)$ повільно зростаюча в точці 1 функція. Не зменшуючи загальності, будемо надалі вважати, що такою точкою скупчення є $z_0 = 1$. Дійсно, в протилежному випадку ми розглянули б добуток Бляшке

$$B^*(z) = B\left(z \cdot e^{i\varphi_0}\right) = \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{\overline{a}_n}{|a_n|} \frac{a_n - ze^{i\varphi_0}}{1 - \overline{a}_n ze^{i\varphi_0}} = \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{\overline{a}_n^*}{|a_n^*|} \frac{a_n^* - z}{1 - \overline{a}_n^* z},$$

де $a_n^* = a_n e^{-i\varphi_0}$, $e^{i\varphi_0}$ – точка скупчення нулів $(a_n)$ добутку $B$.

З формули

$$\frac{B'(z)}{B(z)} = \int\limits_0^1 \frac{(1-t^2)dn(t)}{\left(z - te^{i\varphi_n}\right)\left(1 - zte^{-i\varphi_n}\right)}, \quad |\varphi_n| = |\arg a_n| \to 0, \quad n \to +\infty,$$

для логарифмічної похідної $B$ випливає, що $B'(z)/B(z) = O(1)$ при $z \to e^{i\alpha}$, $|\alpha| > \delta$, $0 < \delta < 1$, оскільки

$$\frac{B'(z)}{B(z)} = (1+o(1)) \int\limits_0^1 \frac{(1-t^2)dn(t)}{\left(e^{i\alpha} - te^{i\varphi_n}\right)\left(1 - te^{-i(\varphi_n - \alpha)}\right)} = (1+o(1))\, e^{-i\alpha} \int\limits_0^1 \frac{(1-t^2)dn(t)}{1 - 2t\cos(\alpha - \varphi_n) + t^2},$$

$z \to e^{i\alpha}$, а останній інтеграл збіжний.

## 1 Означення та формулювання результатів

Нехай $a_n = 1 - r_n e^{i\theta_n}$ $(-\pi/2 < \theta_n < \pi/2)$ – послідовність нулів добутку Бляшке $B$, $n(t) = n(t, B)$ – кількість $(a_n)$ в крузі $\{z\colon |z| \le t\}$ таких, що $1 - r_n \le t$, $0 < t < 1$, $r_n \to 0+$ при $n \to +\infty$. Легко бачити, що $n(t) = \widetilde{n}(1-t)$, де $\widetilde{n}(t)$ – лічильна функція нулів $(a_n)$ добутку $B$ таких, що $r_n \ge t$, $0 < t < 1$.

Позначимо $L$ – клас повільно зростаючих в точці 1 функцій $\upsilon$, тобто $\upsilon$ – невід'ємні, неспадні, необмежені зверху, неперервно диференційовні на $[0, 1)$ функції, $\upsilon(0) = 0$, $\upsilon(t) \sim \upsilon\left((1+t)/2\right)$, $t \to 1-$. Легко бачити, що $(1-t)\upsilon'(t) = o\left(\upsilon(t)\right)$ при $t \to 1-$. Через $\mathscr{B}(\upsilon)$, $\upsilon \in L$, позначимо множину добутків Бляшке $B$, нулі яких задовольняють умову

$$\varlimsup_{t \to 1-} n(t, B)/\upsilon(t) < +\infty.$$

Нехай $-\pi/2 + \eta < \psi_1 < \psi_2 < \ldots < \psi_m < \pi/2 - \eta$, $0 < \eta < 1$, $\Gamma_m = \bigcup\limits_{j=1}^{m} \{z\colon |z| < 1, \arg(1-z) = -\psi_j\} = \bigcup\limits_{j=1}^{m} l_{\psi_j}$ – скінченна система променів; $\mathscr{B}(\upsilon; \Gamma_m)$ – підклас добутків

$B$ класу $\mathscr{B}(\upsilon)$, нулі $(a_n)$ яких лежать на $\Gamma_m$; $n(t,\psi_j) = n(t,\psi_j;B)$ – кількість нулів $B$, що лежать на промені $l_{\psi_j}$ таких, що $1 - r_n \le t$.

Для $\widetilde{\upsilon} \in L$ приймемо

$$\upsilon(t) = \int\limits_0^t \frac{\widetilde{\upsilon}(x)}{1-x}dx, \quad 0 \le t < 1, \quad \upsilon(0) = 0.$$

Легко бачити, що $\upsilon \in L$ і $\widetilde{\upsilon}(t) = o\left(\upsilon(t)\right),\ t \to 1-$. Дійсно, застосовуючи правило Лопіталя, маємо

$$\frac{\upsilon\left(\dfrac{1+t}{2}\right)}{\upsilon(t)} \sim \frac{\widetilde{\upsilon}\left(\dfrac{1+t}{2}\right)\Big/\left(1-\dfrac{1+t}{2}\right)}{2\widetilde{\upsilon}(t)/(1-t)} = \frac{\widetilde{\upsilon}\left(\dfrac{1+t}{2}\right)}{\widetilde{\upsilon}(t)} \to 1,\ t \to 1-;$$

$$\frac{\widetilde{\upsilon}(t)}{\upsilon(t)} \sim \frac{\widetilde{\upsilon}'(t)(1-t)}{\widetilde{\upsilon}(t)} \to 0,\ t \to 1-.$$

Нехай $\widetilde{l}_{\psi_j} = \{z\colon \widetilde{r}_j \le |z| < 1, \arg(1-z) = -\psi_j\}$, $\widetilde{r}_j$ – найменший модуль нуля $B$, що лежить на $l_{\psi_j}$, $j = \overline{1,m}$; $G = \mathbb{D} \setminus \left(\bigcup\limits_{j=1}^m \widetilde{l}_{\psi_j}\right)$; $\ln B$ – однозначна гілка в області $G$ багатозначної функції $\operatorname{Ln} B(z) = \ln|B(z)| + i \operatorname{Arg} B(z)$ така, що $\ln B(0) < 0$.

**Теорема 1.** *Нехай $\widetilde{\upsilon} \in L$, $\Delta_j \ge 0$, $B \in \mathscr{B}(\upsilon;\Gamma_m)$ і для кожного $j = \overline{1,m}$*

$$n(t;\psi_j) = \Delta_j \upsilon(t) + o\left(\widetilde{\upsilon}(t)\right),\ t \to 1-. \tag{1}$$

*Тоді для $z = 1 - re^{-i\varphi}$, $\varphi \in \left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right) \setminus \left(\bigcup\limits_{j=1}^m \theta_{\psi_j}\right)$,*

$$(1-z)\frac{B'(z)}{B(z)} = -i\sum_{j=1}^m \Delta_j\left(2\psi_j + \pi\,\mathrm{sign}(\varphi-\psi_j)\right)\widetilde{\upsilon}(1-r) + o\left(\widetilde{\upsilon}(1-r)\right),\ r \to 0+, \tag{2}$$

*причому для довільного $\delta > 0$ співвідношення (2) виконується рівномірно щодо $\varphi$ на множині $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right) \setminus \left(\bigcup\limits_{j=1}^m (\psi_j - \delta, \psi_j + \delta)\right)$.*

**Теорема 2.** *Нехай $\widetilde{\upsilon} \in L$, $\Delta_j \ge 0$, $B \in \mathscr{B}(\upsilon;\Gamma_m)$ і виконується (2). Тоді*

$$n(t;\psi_j) = (1 + o(1))\,\Delta_j \upsilon(t), \quad t \to 1-.$$

## 2 Допоміжні результати

Будемо використовувати такі твердження, які ми сформулюємо у вигляді лем.

**Лема 1.** *Нехай* $\widetilde{v} \in L$, $0 < \Delta < +\infty$, *нулі* $a_n = 1 - r_n e^{-i\psi}$ *добутку* $B$ *лежать на* $l_\psi$, $-\pi/2 < \psi < \pi/2$ *і*

$$n(t) = \Delta v(t) + o\left(\widetilde{v}(t)\right), \ t \to 1- . \tag{3}$$

*Тоді для* $z = 1 - re^{-i\varphi}$, $\varphi \in (-\pi/2; \pi/2) \setminus \{\psi\}$,

$$(1-z)\frac{B'(z)}{B(z)} = -i\Delta\left(2\psi + \pi\,\mathrm{sign}(\varphi - \psi)\right)\widetilde{v}(1-r) + o\left(\widetilde{v}(1-r)\right), \ r \to 0+, \tag{4}$$

*причому для довільного* $\delta > 0$ *співвідношення* (4) *виконується рівномірно щодо* $\varphi$ *на множині* $(-\pi/2; \psi - \delta] \cup [\psi + \delta; \pi/2)$.

*Доведення.* Після заміни $z = (w-1)/w$ маємо

$$g(w) = B\left(\frac{w-1}{w}\right) = \left(\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{|a_n|}\right)\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{w}{b_n}\right) / \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{w}{c_n}\right) = p_0\frac{g_1(w)}{g_2(w)},$$

де $p_0 = \prod\limits_{n=1}^{+\infty}|a_n|^{-1}$, $b_n = 1/(1-a_n) = e^{i\psi}/r_n$ – нулі цілої функції $g_1$, $c_n = \dfrac{-\overline{a}_n}{1-\overline{a}_n} = -\dfrac{1}{r_n}e^{-i\psi} + 1 = \dfrac{1}{r_n}e^{-i(\psi+\pi)} + 1$ – нулі $g_2$ та

$$n(\tau, 0, g_1) = n(\tau, 0, g_2) = \Delta v\left(1 - \frac{1}{\tau}\right) + o\left(\widetilde{v}\left(1 - \frac{1}{\tau}\right)\right) = \Delta V(\tau) + o\left(\widetilde{V}(\tau)\right), \ \tau \to +\infty,$$

де $V(\tau) = v\left(1 - \dfrac{1}{\tau}\right)$, $\widetilde{V}(\tau) = \widetilde{v}\left(1 - \dfrac{1}{\tau}\right)$, $\tau \geq 1$. Приймемо $\widetilde{g}_2(w) = \prod\limits_{n=1}^{+\infty}\left(1 - \dfrac{w}{\widetilde{c}_n}\right)$, $\widetilde{c}_n = c_n - 1 = \dfrac{1}{r_n}e^{-i(\psi+\pi)}$. Нехай $\widehat{l}_\alpha = \{w\colon |w| \geq 1, \arg w = \alpha\}$, $l^*{}_\alpha = \{w\colon |w| \geq 1, \arg(w-1) = \alpha\}$, $\ln g(w) = \ln p_0 + \ln g_1(w) - \ln\widetilde{g}_2(w) + \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\ln\left(\dfrac{1 - w/\widetilde{c}_n}{1 - w/c_n}\right)$ – однозначна гілка $\mathrm{Ln}\, g(w)$ в $\mathbb{C}$ з розрізами вздовж променів $\widehat{l}_\psi$, $\widehat{l}_{-\psi-\pi}$, $l^*{}_{-\psi-\pi}$ така, що $\ln g(0) = \ln g_1(0) = \ln\widetilde{g}_2(0) = 0$, $\ln p_0 > 0$, $\ln\left(1 - \dfrac{w}{\widetilde{c}_n}\right)\Bigg|_{w=0} = \ln\left(1 - \dfrac{w}{c_n}\right)\Bigg|_{w=0} = 0$. Звідси

$$w\frac{g'(w)}{g(w)} = w\left(\frac{g_1'(w)}{g_1(w)} - \frac{\widetilde{g}_2'(w)}{\widetilde{g}_2(w)}\right) + w\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{c_n - \widetilde{c}_n}{(w - c_n)(w - \widetilde{c}_n)}. \tag{5}$$

Враховуючи нерівність (див., наприклад, [4, с. 92]) $|t - re^{i\varphi}| \geq (t + r)\sin\delta/2$ для $\delta \leq \varphi \leq 2\pi - \delta$, $0 < \delta < 1$, $t > 0$, при $\theta \in [-\psi - \pi + \delta, -\psi + \pi - \delta]$ і $\tau \geq 2/\sin\dfrac{\delta}{2}$ маємо

$$|w - \widetilde{c}_n| = \left|\tau e^{i\theta} - \frac{1}{r_n}e^{i(-\psi-\pi)}\right| = \left|\tau - \frac{1}{r_n}e^{i(-\psi-\theta-\pi)}\right| \geq \left(\tau + \frac{1}{r_n}\right)\sin\frac{\delta}{2},$$
$$|w - c_n| \geq |w - \widetilde{c}_n| - 1 \geq \left(\tau + \frac{1}{r_n}\right)\sin\frac{\delta}{2} - 1 \geq \frac{1}{2}\left(\tau + \frac{1}{r_n}\right)\sin\frac{\delta}{2}.$$

Далі ($t_n = 1/r_n > 1$),

$$\left| w \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(w-c_n)(w-\widetilde{c}_n)} \right| \le \frac{2\tau}{\sin^2\delta/2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\tau+t_n)} \le \frac{2\tau}{\sin^2\delta/2} \int\limits_1^{+\infty} \frac{dn(t,0,\widetilde{g}_2)}{(t+\tau)^2}$$

$$= \frac{4\tau}{\sin^2\delta/2} \int\limits_1^{+\infty} \frac{n(t,0,\widetilde{g}_2)dt}{(t+\tau)^3} \le \frac{8\Delta\tau}{\sin^2\delta/2} \int\limits_1^{+\infty} \frac{V(t+\tau)}{(t+\tau)^3} d(t+\tau) \le \frac{8\Delta\tau}{\sin^2\delta/2} \int\limits_\tau^{+\infty} u^{1/2-3} du \qquad (6)$$

$$= \frac{16\Delta}{3\sin^2\delta/2} \frac{1}{\sqrt{\tau}} = o(1),\ \tau \to +\infty,$$

бо для довільного $\varepsilon > 0$ виконується $V(\tau) = o(\tau^\varepsilon)$ при $\tau \to +\infty$.

Враховуючи асимптотику логарифмічної похідної цілої функції нульового порядку, знайдену в [10, теорема 1], для $w = \tau e^{i\theta}$, $\psi < \theta < \psi + 2\pi$, маємо

$$w\frac{g_1'(w)}{g_1(w)} = \Delta V(\tau) + i\Delta(\theta-\psi-\pi)\widetilde{V}(\tau) + o\left(\widetilde{V}(\tau)\right), \quad \tau \to +\infty;$$

а для $-\psi-\pi < \theta < -\psi+\pi$

$$w\frac{\widetilde{g}_2'(w)}{\widetilde{g}_2(w)} = \Delta V(\tau) + i\Delta(\theta+\psi)\widetilde{V}(\tau) + o\left(\widetilde{V}(\tau)\right), \quad \tau \to +\infty.$$

З (5), (2) та останніх двох співвідношень для $\theta \in (\psi, -\psi+\pi)$ отримуємо ($\tau \to +\infty$)

$$\begin{aligned} w\frac{g'(w)}{g(w)} &= w\left(\frac{g_1'(w)}{g_1(w)} - \frac{\widetilde{g}_2'(w)}{\widetilde{g}_2(w)}\right) = i\Delta\left((\theta-\psi-\pi)-(\theta+\psi)\right)\widetilde{V}(\tau) + o\left(\widetilde{V}(\tau)\right) \\ &= -\left(1+o(1)\right) i\Delta(2\psi+\pi)\widetilde{V}(\tau), \end{aligned}$$

а для $\theta \in (-\psi-\pi, \psi)$

$$w\frac{g'(w)}{g(w)} = \left(1+o(1)\right) i\Delta\left((\theta-\psi+\pi)-(\theta+\psi)\right)\widetilde{V}(\tau) = -\left(1+o(1)\right) i\Delta(2\psi-\pi)\widetilde{V}(\tau),$$

тобто для $\theta \in (-\psi-\pi, -\psi+\pi) \setminus \{\psi\}$ виконується

$$w\frac{g'(w)}{g(w)} = -i\Delta\left(2\psi + \pi\,\mathrm{sign}(\theta-\psi)\right)\widetilde{V}(\tau) + o\left(\widetilde{V}(\tau)\right), \quad \tau \to +\infty. \qquad (7)$$

Оскільки $-\psi-\pi < -\frac{\pi}{2}$, $\psi+\pi > \frac{\pi}{2}$, $w = \frac{1}{1-z}$, $g'(w) = B'\left(\frac{w-1}{w}\right)\frac{1}{w^2} = (1-z)^2 B'(z)$ і для $z = 1-re^{-i\varphi}$ маємо $\theta = \arg w = \arg\left(\frac{1}{1-z}\right) = \arg\left(\frac{1}{r}e^{i\varphi}\right) = \varphi$, то з (7) отримуємо (4), а отже, лему 1 доведено. □

**Лема 2.** *Нехай* $\widetilde{\upsilon} \in L$, $0 < \Delta < +\infty$, *нулі* $a_n = 1 - r_n e^{-i\psi}$, $-\pi/2 < \psi < \pi/2$, *добутку* $B$ *лежать на* $l_\psi$ *і для* $z = 1 - re^{-i\varphi}$, $\varphi \in (-\pi/2; \pi/2) \setminus \{\psi\}$ *виконується*

$$(1-z)\frac{B'(z)}{B(z)} = -i\Delta\left(2\psi + \pi\,sign(\varphi-\psi)\right)\widetilde{\upsilon}(1-r) + o\left(\widetilde{\upsilon}(1-r)\right),\ r \to 0+.$$

*Тоді* $n(t; B) = (1+o(1))\upsilon(t)$, $t \to 1-$.

*Доведення.* Не зменшуючи загальності, припустимо, що $\psi = 0$. Після заміни $z = (w-1)/w$ отримуємо

$$g(w) = B\left(\frac{w-1}{w}\right) = \prod_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a_n}\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{w}{b_n}\right)/\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{w}{c_n}\right) = p_0\frac{g_1(w)}{g_2(w)},$$

де $b_n = 1/r_n > 0$ – нулі цілої функції $g_1$, $c_n = -1/r_n + 1 < 0$ – нулі $g_2$ та $n(\tau, 0, g_1) = n(1-1/\tau, B)$.

Оскільки (див. доведення леми 1) $wg'(w)/g(w) = (1-z)B'(z)/B(z)$, то за умов леми 2 для $w = \tau e^{i\theta}$, $0 < |\theta| < \pi$, маємо

$$w\frac{g'(w)}{g(w)} = -i\Delta\pi\,\mathrm{sign}\,\theta\widetilde{V}(\tau) + o\left(\widetilde{V}(\tau)\right),\ \tau\to+\infty, \tag{8}$$

де $\widetilde{V}(\tau) = \widetilde{v}\,(1-1/\tau)\,,\ \widetilde{V}(2\tau)\sim\widetilde{V}(\tau)$ при $\tau\to+\infty$.

Покладемо $S_\rho(\alpha,\beta) = \{w\colon |w|\le\rho, \alpha\le\arg w\le\beta\}$, $-\pi<\alpha<\beta<\pi$, $\partial S_\rho^+(\alpha,\beta)$ – додатна орієнтація межі сектора $S_\rho(\alpha,\beta)$, $V(\tau) = \int\limits_1^\tau \widetilde{V}(t)/tdt$. Тоді, враховуючи (8), як при доведенні теореми 2 з [10] отримуємо

$$n(\rho,0,g_1) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial S_\rho^+(\alpha,\beta)}\frac{g'(w)}{g(w)}dw = (1+o(1))\Delta V(\rho),\ \rho\to+\infty,$$

бо $\widetilde{V}(\rho) = o\left(V(\rho)\right),\ \rho\to+\infty$. Оскільки $V(\rho) = v\,(1-1/\rho) = \int\limits_0^{1-1/\rho}\widetilde{v}(x)/(1-x)dx$, $n(\rho,0,g) = n(1-1/\rho, B)$, то $n(t;B) = (1+o(1))v(t)$, $t\to 1-$. □

## 3 Доведення теорем

За умов теорем можемо зобразити $B$ у вигляді

$$B(z) = B_1(z)\cdot B_2(z)\cdot\ldots\cdot B_m(z),$$

де $B_j(z)$ – добуток Бляшке побудований за нулями $B$, які розташовані на промені $l_{\psi_j}$. З рівності

$$\ln B(z) = \ln B_1(z) + \ln B_2(z) + \ldots + \ln B_m(z),\quad z\in G, \tag{9}$$

завдяки (4), для $z = 1 - re^{-i\varphi}$, $\varphi\in(-\pi/2;\pi/2)\setminus\left(\bigcup\limits_{j=1}^m\psi_j\right)$, маємо $(r\to 0+)$

$$(1-z)\frac{B'(z)}{B(z)} = (1-z)\sum_{j=1}^m\frac{B_j'(z)}{B_j(z)} = -i\sum_{j=1}^m\Delta_j\left(2\psi_j + \pi\,\mathrm{sign}(\varphi-\psi_j)\right)\widetilde{v}(1-r) + o\left(\widetilde{v}(1-r)\right),$$

що доводить теорему 1.

Враховуючи (9) та лему 2 для кожного $j = \overline{1,m}$ отримуємо $n(t;\psi_j) = (1+o(1))\,\Delta_j v(t)$, $t\to 1-$, що доводить теорему 2.

**Зауваження 1.** *Замінити умову розташування нулів $B$ на $\Gamma_m$ в теоремі 1 на існування кутової щільності в точці 1 нулів $B$ ми не можемо, оскільки апроксимаційна теорема ([9]) для логарифмічної похідної цілих функцій з повільно зростаючою лічильною функцією нулів при $r\to+\infty$ є з точністю до $o\left(V(r)\right)$, а $\widetilde{V}(r) = o\left(V(r)\right)$, $r\to+\infty$.*

## Список літератури

[1] Chyzhykov I.E., Gundersen G.G., Heittokangas J. *Linear differential equations and logarithmic derivative estimates.* Proc. London Math. Soc. 2003, **86** (3), 735–754. doi:10.1112/S0024611502013965

[2] Garnett J.B. Bounded Analytic Functions. Mir, Moscow, 1984. (in Russian)

[3] Goldberg A.A., Korenkov N.E. *Asymptotic behavior of logarithmic derivative of entire function of completely regular growth.* Sib. Math. J. 1980, **21** (3), 363–375. doi:10.1007/BF00968180 (translation of Sibirsk. Mat. Zh. 1980, **21** (3), 63–79. (in Russian))

[4] Goldberg A.A., Ostrovskii I.V. Value distribution of meromorphic functions. Nauka, Moscow, 1970. (in Russian)

[5] Hayman W.K., Miles J. *On the growth of a meromorphic function and its derivatives.* Complex Variables 1989, **12**, 245–260. doi:10.1080/17476938908814369

[6] Miles J. *A sharp form of the lemma on the logarithmic derivative.* J. London Math. Soc. 1992, **45** (2), 243–254. doi:10.1112/jlms/s2-45.2.243

[7] Strelitz Sh.I. Asymptotic properties of analytical solutions of differential equations. Mintis, Vilnius, 1972. (in Russian)

[8] Zabolotskyi M.V. *Asymptotics of Blaschke products the counting function of zeros of which is slowly increasing.* Ukrainian Math. J. 2000, **52** (12), 1882–1895. doi:10.1023/A:1010455926490 (translation of Ukrain. Mat. Zh. 2000, **52** (12), 1650–1660. (in Ukrainian))

[9] Zabolotskyj M.V., Mostova M.R. *Asymptotic behavior of the logarithmic derivative of entire functions of zero order.* Carpathian Math. Publ. 2014, **6** (2), 237–241. doi:10.15330/cmp.6.2.237-241 (in Ukrainian)

[10] Zabolotskyi M.V., Mostova M.R. *Sufficient conditions for the existence of the $v$-density of zeros for an entire function of order zero.* Ukrainian Math. J. 2016, **68** (4), 570–582. doi:10.1007/s11253-016-1242-1 (translation of Ukrain. Mat. Zh. 2016, **68** (4), 506–516. (in Ukrainian))


*Надійшло 01.03.2021*

Zabolotskyi M.V., Gal Y.M., Mostova M.R. *Logarithmic derivative of the Blaschke product with slowly increasing counting function of zeros*, Bukovinian Math. Journal. **9**, 1 (2021), 164–170.


The Blaschke products form an important subclass of analytic functions on the unit disc with bounded Nevanlinna characteristic and also are meromorphic functions on $\mathbb{C}$ except for the accumulation points of zeros $B(z)$. Asymptotics and estimates of the logarithmic derivative of meromorphic functions play an important role in various fields of mathematics. In particular, such problems in Nevanlinna's theory of value distribution were studied by Goldberg A.A., Korenkov N.E., Hayman W.K., Miles J. and in the analytic theory of differential equations – by Chyzhykov I.E., Strelitz Sh.I.

Let $z_0 = 1$ be the only boundary point of zeros $(a_n)$ of the Blaschke product $B(z)$; $\Gamma_m = \bigcup\limits_{j=1}^{m} \{z : |z| < 1, \arg(1-z) = -\theta_j\} = \bigcup\limits_{j=1}^{m} l_{\theta_j}$, $-\pi/2+\eta < \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_m < \pi/2-\eta$, be a finite system of rays, $0 < \eta < 1$; $v(t)$ be continuous on $[0,1)$, $v(0) = 0$, slowly increasing at the point 1 function, that is $v(t) \sim v\left((1+t)/2\right)$, $t \to 1-$; $n(t, \theta_j; B)$ be a number of zeros $a_n = 1 - r_n e^{i\theta_j}$ of the product $B(z)$ on the ray $l_{\theta_j}$ such that $1 - r_n \le t$, $0 < t < 1$. We found asymptotics of the logarithmic derivative of $B(z)$ as $z = 1 - re^{-i\varphi} \to 1$, $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$, $\varphi \ne \theta_j$, under the condition that zeros of $B(z)$ lay on $\Gamma_m$ and $n(t,\theta_j;B) \sim \Delta_j v(t)$, $t \to 1-$, for all $j = \overline{1,m}$, $0 \le \Delta_j < +\infty$. We also considered the inverse problem for such $B(z)$.