Дудкін М.Є., Дюженкова О.Ю.

СИНГУЛЯРНІ СКІНЧЕНОГО РАНГУ НЕСИМЕТРИЧНІ ЗБУРЕННЯ КЛАСУ $\mathcal{H}_{-2}$ САМОСПРЯЖЕНОГО ОПЕРАТОРА

Сингулярні збурення самоспряжених операторів досліджені майже повністю. Типовою моделлю такого збурення є оператор Лапласа збурений потенціалом типу δ-функція Дірака. Збурення самоспряженого оператора несиметричним потенціалом є новим напрямом досліджень, породженим моделями з не локальною взаємодією. Такі збурення рангу один розглянуті у попередніх роботах. Ці дослідження вже узагальнені і на випадок збурення скінченого рангу, але класу $\mathcal{H}_{-1}$.

В роботі, сингулярні рангу один несиметричні збурення узагальнені на випадок скінченого рангу класу $\mathcal{H}_{-2}$. В цьому дослідженні наведено означення та дано опис резольвенти такого збурення в абстрактному гільбертовому просторі і для довільного початкового (необмеженого) самоспряженого оператора. Основні твердження роботи проілюстровані на чисельному прикладі

Ключові слова і фрази: сингулярно збурений оператор, шкала гільбертових просторів, несиметричне збурення.

Національний Технічний Університет України "Київський Політехнічний Інститут імені Ігоря Сікорського", Київ, Україна (Дудкін М.Е.)
Національний Технічний Університет України "Київський Політехнічний Інститут імені Ігоря Сікорського", Київ, Україна (Дюженкова О.Ю.)
e-mail: *dudkin@imath.kiev.ua (Дудкін М.Е.), oduzen@ukr.net (Дюженкова О.Ю.)*

Вступ

Першими роботами, присвяченими сингулярно збуреним операторам були роботи Ф.А.Березіна і Л.Д.Фаддєєв 1961 р. Вони розглядали оператор Лапласа збурений δ-потенціалом. Із тих часів симетричним збуренням самоспряжених операторів присвячена дуже велика кількість робіт, які зібрані у монографіях [1, 2]. В роботах авторів [8, 9] вперше розглядалися сингулярні несиметричні збурення самоспряженого оператора класів $\mathcal{H}_{-1}$ і $\mathcal{H}_{-2}$ але рангу один та описані деякі властивості точкового спектра, який виникає при таких несиметричних збуреннях.

УДК 517.9
2010 *Mathematics Subject Classification:* 47A10, 47A55.

У даній роботі ми пропонуємо узагальнення результатів робіт [8, 9] та [2] на випадок несиметричних класу $\mathcal{H}_{-2}$ збурень скінченого рангу. А саме, розглядаємо формальний вираз

$$\tilde{A} = A + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle \cdot, \omega_j \rangle \delta_j, \tag{1}$$

де A – заданий незбурений самоспряжений оператор у сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$, $\alpha_j \in \mathbb{C}$, ω_j, δ_j, $j = 1, 2, ..., n < \infty$ – вектори із негативного простору $\mathcal{H}_{-2}$ побудованого за оператором A, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – дуальний скалярний добуток між позитивним і негативним просторами. Такі оператори, наприклад, виникають у моделях із нелокальною взаємодією [3, 4], а також із збуреннями гармонічного осцилятора несиметричними потенціалами типу δ-функція Дірака [10].

Деякі важливі пояснення по роботі оформлені зауваженнями, які також властиві і для симетричних збурень, зокрема класу $\mathcal{H}_{-1}$.

1 Попередні відомості

Наведемо стандартні позначення, які є, наприклад, в [2]. Нехай у сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$, зі скалярним добутком $(\cdot, \cdot)$ і нормою $\| \cdot \| = \sqrt{(\cdot, \cdot)}$, задано необмежений самоспряжений оператор A із областю визначення $\mathfrak{D}(A)$. Позначимо через $\rho(A)$ множину регулярних точок оператора A.

Розглянемо ланцюг просторів

$$\mathcal{H}_{-2} \supset \mathcal{H}_{-1} \supset \mathcal{H} \equiv \mathcal{H}_0 \supset \mathcal{H}_{+1} \supset \mathcal{H}_{+2}, \tag{2}$$

де $\mathcal{H}_{+k} = \mathfrak{D}(|A|^{k/2})$ – позитивний простір з нормою $\|\varphi\|_{+k} = \|(|A| + I)^{k/2}\varphi\|$, $\varphi \in \mathfrak{D}(|A|^{k/2})$, $\mathcal{H}_{-k}$ – поповнення $\mathcal{H}$ за нормою $\|f\|_{-k} = \|(|A| + I)^{-k/2} f\|$, $f \in \mathcal{H}$, $k = 1, 2$, I – одиничний оператор. Очевидно $\mathcal{H}_{+2} = \mathfrak{D}(A)$. Через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ позначаємо дуальний скалярний добуток для пари просторів $\mathcal{H}_{+2}$ і $\mathcal{H}_{-2}$.

Розширення оператора A за неперервністю на весь простір $\mathcal{H}_{-2}$ можна вважати обмеженим оператором, що діє з $\mathcal{H}_{+2}$ в $\mathcal{H}_{-2}$, а також – необмеженим оператором в $\mathcal{H}_{-2}$, але із областю визначення $\mathcal{H}_{+2}$. Таке розширення позначено через $\mathbf{A}$.

У ланцюгу (2) розглянемо лінійний оператор

$$V = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle \cdot, \omega_j \rangle \delta_j, \quad n < \infty, \quad \omega_j, \delta_j \in \mathcal{H}_{-2} \tag{3}$$

із областю визначення $\mathfrak{D}(V) \subset \mathcal{H}_{+2}$ і областю значень $\mathfrak{R}(V) \subset \mathcal{H}_{-2}$; $\alpha_j \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Отже сума $\mathbf{A} + V$ є обмеженим оператором з областю визначення $\mathcal{H}_{+2}$ і областю значень $\mathcal{H}_{-2}$.

Формальний вираз (1) нажаль не можна розуміти як оператор $\mathbf{A} + \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j \langle \cdot, \omega_j \rangle \delta_j$, з простору $\mathcal{H}_{+2}$ в $\mathcal{H}_{-2}$, звужений на $\mathcal{H}$, як це зручно робити при збуреннях класу $\mathcal{H}_{-1}$. Тому при додаткових припущеннях наведемо означення несиметрично сингулярно скінченого рангу збуреного самоспряженого оператора класу $\mathcal{H}_{-2}$. Покладемо $\Omega := \operatorname{span}\{\omega_j\}_{j=1}^n$, $\Delta := \operatorname{span}\{\delta_j\}_{j=1}^n$ і для початку вважатимемо: по-перше $\Omega \subset \mathcal{H}_{-2}$, $\Delta \subset$

$\mathcal{H}_{-2}$, тобто збурений оператор є класу $\mathcal{H}_{-2}$, а по-друге $\Omega \cap \mathcal{H}_{-1} = \{0\}$, $\Delta \cap \mathcal{H}_{-1} = \{0\}$, тобто збурений оператор є чисто сингулярно збуреним класу $\mathcal{H}_{-2}$, (не має компоненти класу $\mathcal{H}_{-1}$ і, тим більше, регулярної компоненти – збурений і незбурений оператор збігаються на щільній множині в $\mathcal{H}$ і яка не є щільною в $\mathcal{H}_{+2}$ але є щільною в $\mathcal{H}_{+1}$).

Протягом роботи буде використовуватися позначка A замість $\mathbf{A}$, якщо це не буде вести до суперечності.

2 Означення збуреного оператора класу $\mathcal{H}_{-2}$

Означення 1. *Нехай A – необмежений самоспряжений оператор в сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$. Для наборів лінійно незалежних векторів $\{\omega_j\}_{j=1}^n \subset \mathcal{H}_{-2}$ і $\{\delta_j\}_{j=1}^n \subset \mathcal{H}_{-2}$, $n < \infty$, таких що $\Omega \cap \mathcal{H}_{-1} = \{0\}$, $\Delta \cap \mathcal{H}_{-1} = \{0\}$, де $\Omega := \operatorname{span}\{\omega_j\}_{j=1}^n$, $\Delta := \operatorname{span}\{\delta_j\}_{j=1}^n$, побудуємо оператор $V = \sum\limits_{j=1}^n \alpha_j \langle \cdot, \omega_j \rangle \delta_j$.*

Оператор $\tilde{A}$ називається сингулярно рангу n збуреним $\mathcal{H}_{-2}$-класу відносно A, якщо при деякому фіксованому $z \in \rho(A)$ його область визначення

$$\mathfrak{D}(\tilde{A}) = \left\{ \vartheta = \varphi - \sum_{i,j=1}^n b_{i,j}(z) \langle \varphi, \omega_i \rangle (A - z)^{-1} \delta_j \mid \varphi \in \mathfrak{D}(A) \right\}, \tag{4}$$

де $b_{i,j}(z)$ – елементи матриці оберненої до

$$G(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha_1} + g_{11}(z) & g_{12}(z) & \dots & g_{1n}(z) \\ g_{21}(z) & \frac{1}{\alpha_2} + g_{22}(z) & \dots & g_{2n}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1}(z) & g_{n2}(z) & \dots & \frac{1}{\alpha_n} + g_{nn}(z) \end{bmatrix}, \tag{5}$$

де $g_{i,j}(z) = \tau_{i,j} + ((A - z)^{-1}(1 + zA)(A^2 + 1)^{-1}\delta_i, \omega_j)$, $T = \{\tau_{i,j}\}_{i,j=1}^n$ – матриця-параметр, $\tau_{i,j} \in \mathbb{C}$, $i, j = 1, 2, ..., n$, за умови $\det G(z) \neq 0$; та

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}(\tilde{A}) =& \mathfrak{D}_{\mathcal{H}_2} \dot{+} \operatorname{span}\{(A - z)^{-1}\delta_j\}_{j=1}^n, \\ & \mathfrak{D}_{\mathcal{H}_2} = \left\{ \varphi \in \mathfrak{D}(A) \mid ((A - z)\varphi, (A - \bar{z})^{-1}\omega_j) = 0, \ j = 1, 2, ..., n \right\}, \end{aligned} \tag{6}$$

за умови $\det G(z) = 0$; і дія на векторах з $\mathfrak{D}(\tilde{A})$ задається правилом

$$(\tilde{A} - z)\vartheta = (A - z)\varphi. \tag{7}$$

(Такий оператор позначаємо $\tilde{A} \in \mathcal{P}_{-2}^n(A)$).

Зауваження 1. *Два варіанти області визначення $\mathfrak{D}(\tilde{A})$ збурення класу $\mathcal{H}_{-2}$ (як і класу $\mathcal{H}_{-1}$) традиційно обумовлені тим, що у випадку (6) деяка точка z може стати точкою точкового спектра оператора $\tilde{A}$, тобто $z \in \sigma_p(\tilde{A})$, і отже ми отримуємо $\det G(z) = 0$. У іншому разі, тобто (4), маємо $z \notin \sigma_p(\tilde{A})$, і отже тоді $\det G(z) \neq 0$.*

Зауваження 2. *Далі буде зрозуміло, що область визначення наведена в означенні не залежать від вибору $z \in \rho(A)$. А також буде зрозуміло, що число z, відповідне випадку (4), завжди існує, оскільки скінчено-вимірні збурення самоспряженого оператора не міняють його неперервний спектр.*

Зауваження 3. *Якщо в означенні 1 для самоспряженого оператора A, покласти $\omega_j = \delta_j$, і $\alpha_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $j = 1, 2, ..., n$, то отримуємо відоме визначення сингулярно збуреного рангу n самоспряженого оператора класу $\mathcal{H}_{-2}$ [2].*

Зауваження 4. *В роботі розглядається формальний вираз у вигляді (1), а не $\tilde{A} = A + \sum\limits_{i,j=1}^{n} \alpha_{i,j} \langle \cdot, \omega_i \rangle \delta_j$, тому що останній вираз шляхом перетворень можна завжди звести до вигляду (1).*

Зауваження 5. *Оскільки оператор $\tilde{A}$ не є самоспряженим, то його спряжений $\tilde{A}^*$ є відмінним від $\tilde{A}$, і також може бути означеним, подібно до $\tilde{A}$. Отже нехай A – необмежений самоспряжений оператор в сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$. Для наборів лінійно незалежних векторів $\{\omega_j\}_{j=1}^{n}$ і $\{\delta_j\}_{j=1}^{n}$, $n < \infty$, таких що $\Omega \cap \mathcal{H}_{-1} = \{0\}$, $\Delta \cap \mathcal{H}_{-1} = \{0\}$, де $\Omega := span\{\omega_j\}_{j=1}^{n}$, $\Delta := span\{\delta_j\}_{j=1}^{n}$, побудуємо оператор $V^* = \sum\limits_{j=1}^{n} \bar{\alpha}_j \langle \cdot, \delta_j \rangle \omega_j$, очевидно, спряжений до V.*

Оператор $\tilde{A}^* \in \mathcal{P}_{-2}^{n}(A)$ є спряженим до сингулярно рангу n збуреного $\mathcal{H}_{-2}$-класу відносно A, якщо при деякому фіксованому $\bar{z} \in \rho(A)$ його область визначення

$$\mathfrak{D}(\tilde{A}^*) = \left\{ \vartheta = \varphi - \sum_{i,j=1}^{n} b_{i,j}^*(\bar{z}) \langle \varphi, \delta_i \rangle (A - \bar{z})^{-1} \omega_j \mid \varphi \in \mathfrak{D}(A) \right\}, \tag{8}$$

де $b_{i,j}^*(\bar{z})$ – елементи матриці оберненої до

$$G^*(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha_1} + g_{11}^*(\bar{z}) & g_{12}^*(\bar{z}) & \dots & g_{1n}^*(\bar{z}) \\ g_{21}^*(\bar{z}) & \frac{1}{\alpha_2} + g_{22}^*(\bar{z}) & \dots & g_{2n}^*(\bar{z}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1}^*(\bar{z}) & g_{n2}^*(\bar{z}) & \dots & \frac{1}{\alpha_n} + g_{nn}^*(\bar{z}) \end{bmatrix}, \tag{9}$$

де $g_{i,j}^*(\bar{z}) = \bar{\tau}_{i,j} + ((A - \bar{z})^{-1}(1 + \bar{z}A)(A^2 + 1)^{-1}\delta_i, \omega_j)$, $T^* = \{\tau_{i,j}^*\}_{i,j=1}^{n}$ – матриця-параметр спряжена до T, тобто $\tau_{i,j}^* = \bar{\tau}_{j,i}$, $\tau_{i,j} \in \mathbb{C}$, $i, j = 1, 2, ..., n$, за умови $\det G^*(z) \neq 0$; та

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}(\tilde{A}^*) = & \mathfrak{D}_{\mathcal{H}_2} \dot{+} span\{(A - \bar{z})^{-1}\omega_j\}_{j=1}^{n}, \\ & \mathfrak{D}_{\mathcal{H}_2} = \left\{ \varphi \in \mathfrak{D}(A) \mid ((A - \bar{z})\varphi, (A - z)^{-1}\delta_j) = 0,\ j = 1, 2, ..., n \right\}, \end{aligned} \tag{10}$$

за умови $\det G^*(z) = 0$; і дія задається правилом:

$$(\tilde{A}^* - \bar{z})\vartheta = (A - \bar{z})\varphi. \tag{11}$$

Зауваження 6. *Спряжений сингулярно збурений оператор можна використати для опису обох операторів як єдиний об'єкт. Проте такий опис не є зручним. Лінійний замкнений оператор $\tilde{A} \neq A$, щільно визначений в $\mathcal{H}$, є сингулярно збуреним класу $\mathcal{H}_{-2}$ відносно самоспряженого оператора A, якщо обидві множини*

$$\mathfrak{D} = \{f \in \mathfrak{D}(A) \cap \mathfrak{D}(\tilde{A}) \mid Af = \tilde{A}f\}, \quad \mathfrak{D}_* = \{f \in \mathfrak{D}(A) \cap \mathfrak{D}((\tilde{A})^*) \mid Af = \tilde{A}^*f\}$$

є щільними в $\mathcal{H}$.

Очевидно, що для кожної пари A і $\tilde{A}$ та A і $\tilde{A}^*$ існує спільне (зокрема, симетричне) звуження, тобто оператори $\dot{A} := A \restriction \mathfrak{D}$ і $\dot{A}_* := A \restriction \mathfrak{D}_*$ із нетривіальними індексами дефекту кожний

$$\mathbf{n}^{\pm}(\dot{A}) = \dim\, \ker(\dot{A} \mp z)^* \neq 0, \quad \mathbf{n}^{\pm}(\dot{A}_*) = \dim\, \ker(\dot{A}_* \mp z)^* \neq 0, \quad z \in \rho(A).$$

У даній роботі: $\mathbf{n}^{\pm}(\dot{A}) = \mathbf{n}^{\pm}(\dot{A}_*) = n < \infty$. Останні міркування є близькими до розв'язних розширень, описаних в роботі М.И.Вішика [5], та нормальних розширень формально нормального оператора [6, 7]. Але такий опис не розрізняє збурення класів $\mathcal{H}_{-1}$ і $\mathcal{H}_{-2}$. Якщо $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_*$ і $\tilde{A} = \tilde{A}^*$, то отримуємо звичайний опис сингулярно збуреного самоспряженого оператора [2].

3 Резольвента сингулярно несиметрично рангу n збуреного класу $\mathcal{H}_{-2}$ оператора

Позначимо, для $z \in \rho(A)$, резольвенту $R_z = (A - z)^{-1}$ незбуреного самоспряженого оператора A і наведемо загальний вигляд резольвенти сингулярно несиметрично рангу n збуреного класу $\mathcal{H}_{-2}$ оператора $\tilde{R}_z = (\tilde{A} - z)^{-1}$, $z \in \rho(\tilde{A})$ в $\mathcal{H}$.

Теорема 1. *Нехай A – необмежений самоспряжений оператор в сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ і $\tilde{A} \in \mathcal{P}^n_{-2}(A)$ – сингулярно несиметрично рангу n збурений класу $\mathcal{H}_{-2}$ відносно A оператор, визначений в означенні 1.*

Тоді резольвенти незбуреного R_z і збуреного $\tilde{R}_z$ операторів пов'язані формулою типу М.Крейна

$$\tilde{R}_z = R_z + \sum_{i,j=1}^{n} b_{i,j}(z)(\cdot, n_i(\bar{z}))m_j(z), \quad z, \xi \in \rho(A) \cap \rho(\tilde{A}) \tag{12}$$

із векторно-значними функціями

$$n_j(z) = (A - \xi)(A - z)^{-1} n_j(\xi),\ m_j(z) = (A - \xi)(A - z)^{-1} m_j(\xi),\ j = 1, 2, ..., n, \tag{13}$$

де $n_j(z), m_j(z) \in \mathcal{H} \setminus \mathcal{H}_{+1}$, і матрично-значною функцією $G(z)^{-1} = \{-b_{i,j}(z)\}_{i,j=1}^n$, такою що

$$G(z) - G(\xi) = (z - \xi)\Gamma(n_i(\xi), m_j(\bar{z})), \tag{14}$$

де $\Gamma(\,\cdot\,\cdot\,)$ – матриця Грама векторів $n_i(z) = R_z\delta_i$, $m_j(z) = R_z\omega_j$; і коефіцієнти $0 < |\alpha_i| < \infty$, $i, j = 1, 2, ..., n$.

Доведення. Вираз (12) по суті випливає з (4) (точніше, традиційно, (4) формувалось з огляду на (12)). Дійсно покладемо $\forall f \in \mathcal{H}$, $(A - z)^{-1} f = \varphi$, тобто $f = (A - z)\varphi$ і підставимо його в (12). Тоді

$$\mathfrak{D}(\tilde{A}) \ni \vartheta := \tilde{R} f = \varphi + \sum_{i,j=1}^{n} b_{i,j}(z)(\varphi, \omega_i)(A - z)^{-1}\delta_j,$$

(з урахуванням знака при $G(z)$).

Покажемо (13). Дійсно, якщо покласти $n_j(z) = (A-z)^{-1}\delta_i$, $n_j(\xi) = (A-\xi)^{-1}\delta_i$, то

$$(A-z)n_j(z) = (A-\xi)n_j(\xi), \quad n_j(z) = (A-\xi)(A-z)^{-1}n_j(\xi), \quad i = 1,2,...,n.$$

Аналогічно якщо $m_j(z) = (A-z)^{-1}\omega_i$, $m_j(\xi) = (A-\xi)^{-1}\omega_i$, то

$$(A-z)m_j(z) = (A-\xi)m_j(\xi), \quad m_j(z) = (A-\xi)(A-z)^{-1}m_j(\xi), \quad i = 1,2,...,n.$$

Зауважимо для подальшого, що оскільки $\{\delta_j\}$, $j = 1,2,...,n$ і $\{\omega_j\}$, $j = 1,2,...,n$ – множини лінійно незалежних векторів, то, відповідно, і $\{n_j(z)\}$, $j = 1,2,...,n$, і $\{m_j(z)\}$, $j = 1,2,...,n$ при кожному фіксованому $z \in \rho(A)$ також є множини лінійно незалежних векторів (завдяки лінійності оператора $\mathbf{A}$).

Покажемо (14). Запишемо лівий бік (14), використовуючи (5):

$$G(z) - G(\xi) = \begin{bmatrix} g_{11}(z) - g_{11}(\xi) & g_{12}(z) - g_{12}(\xi) & \dots & g_{1n}(z) - g_{1n}(\xi) \\ g_{21}(z) - g_{21}(\xi) & g_{22}(z) - g_{22}(\xi) & \dots & g_{2n}(z) - g_{2n}(\xi) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1}(z) - g_{n1}(\xi) & g_{n2}(z) - g_{n2}(\xi) & \dots & g_{nn}(z) - g_{nn}(\xi) \end{bmatrix},$$

тобто (використовуючи скорочену форму запису матриць маємо

$$\begin{aligned} &G(z) - G(\xi) \\ &\quad = \left\{\langle \delta_i, [(A-z)^{-1}(1+zA)(A^2+1)^{-1}\delta_i - (A-\xi)^{-1}(1+\xi A)(A^2+1)^{-1}\delta_i], \omega_j\rangle\right\}_{i,j=1}^n \\ &\quad = \left\{\langle [(A-z)^{-1}(1+zA)(A^2+1)^{-1} - (A-\xi)^{-1}(1+\xi A)(A^2+1)^{-1}]\delta_i, \omega_j\rangle\right\}_{i,j=1}^n \\ &\quad = \left\{\langle [(A-z)^{-1}(1+zA) - (A-\xi)^{-1}(1+\xi A)](A^2+1)^{-1}\delta_i, \omega_j\rangle\right\}_{i,j=1}^n \\ &\quad = \left\{\langle [(A-z)^{-1} - (A-\xi)^{-1} + zA(A-z)^{-1} - \xi A(A-\xi)^{-1}](A^2+1)^{-1}\delta_i, \omega_j\rangle\right\}_{i,j=1}^n \\ &\quad = \big\{\big([(z-\xi)(A-z)^{-1}(A-\xi)^{-1} + zA(A-z)^{-1} - \xi A(A-\xi)^{-1}] \\ &\quad \cdot(A^2+1)^{-1}(A-\xi)n_i(\xi), (A-\bar{z})m_j(z)\big)\big\}_{i,j=1}^n \\ &\quad = \left\{\left([(z-\xi) + zA^2 - z\xi A - \xi A^2 + z\xi A](A^2+1)^{-1}n_i(\xi), m_j(z)\right)\right\}_{i,j=1}^n \\ &\quad = (z-\xi)\left\{\left([1+A^2](A^2+1)^{-1}n_i(\xi), m_j(z)\right)\right\}_{i,j=1}^n \\ &\quad = (z-\xi)\Gamma(n_i(\xi), m_j(\bar{z})), \end{aligned}$$

де використано тотожність Гільберта $(A-\bar{z})^{-1} - (A-\bar{\xi})^{-1} = (\bar{z}-\bar{\xi})(A-\bar{z})^{-1}(A-\bar{\xi})^{-1}$. □

Зауваження 7. *Взагалі у теоремі можна покладати деякі* $\alpha_i = 0$, $i = 1,2,...,n$. *У такому разі маємо, або збурення рангу менше за* n, *або взагалі* $\tilde{R}_z = R_z$. *Також можна покладати деякі* $\alpha_i = \infty$, $i = 1,2,...,n$. *У такому разі на місті відповідних* $\frac{1}{\alpha_i}$, *не порушуючи загальності, можна вважати нулі.*

Зауваження 8. *Для спряженого оператора* $\tilde{A}^*$, *можна також сформулювати і довести теорему аналогічна до Теорема 1.*

4 Обернена задача для сингулярно несиметрично збуреного рангу n класу $\mathcal{H}_{-2}$ оператора

Для збуреного оператора класу $\mathcal{H}_{-2}$, $\tilde{A} \in \mathcal{P}^{n}_{-2}(A)$, як і для класу $\mathcal{H}_{-1}$, та самоспряжених збурень, також формулюється і розв'язується обернена задача.

Теорема 2. *Нехай в сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ заданий самоспряжений оператор A, тоді операторно-значна функція, для $z \in \rho(A)$,*

$$\tilde{R}_z := (A-z)^{-1} + \sum_{i,j=1}^{n} b_{i,j}(z)(\cdot, n_i(\bar{z}))m_j(z) \tag{15}$$

є резольвентою сингулярно збуреного класу $\mathcal{H}_{-2}$ оператора, якщо для $n_i(\bar{z})$, $m_i(z)$, $j = 1, 2, ..., n$ та $G(z)^{-1} = \{-b_{i,j}(z)\}_{i,j=1}^{n}$ виконуються співвідношення:

$$n_j(\bar{z}) = (A-\bar{\xi})(A-\bar{z})^{-1}n_j(\bar{\xi}),\ m_j(z) = (A-\xi)(A-z)^{-1}m_j(\xi),\ j = 1, 2, ..., n, \tag{16}$$

$$G(z) - G(\xi) = (z-\xi)\Gamma(n_i(\xi), m_j(\bar{z})), \tag{17}$$

і $\mathrm{span}\{n_i(z)\}_{i=1}^{n}, \mathrm{span}\{m_i(z)\}_{i=1}^{n} \subset \mathcal{H} \setminus \mathcal{H}_{+1}$.

Доведення. Використовуємо теореми 1 і 2 з [11], Розділ VIII, §1. А саме, операторно-значна функція (16) $\tilde{R}_z$ є резольвентою деякого замкненого оператора якщо:

- $\tilde{R}_z$ задовольняє тотожність Гільберта з деякими $z, \xi \in \mathbb{C}$: $\tilde{R}_z - \tilde{R}_\xi = (z-\xi)\tilde{R}_z\tilde{R}_\xi$, тобто (в термінах [11]) є псевдорезольвентою і
- $\tilde{R}_z$ має лише тривіальне ядро, тобто $\ker(\tilde{R}_z) = \{0\}$.

Підставимо (15) у вигляді

$$\tilde{R}_z := R_z - \sum_{i,j=1}^{n} b_{i,j}(z)(\cdot, n_i(\bar{z}))m_j(z)$$

у тотожність Гільберта $\tilde{R}_z - \tilde{R}_\xi = (z-\xi)\tilde{R}_z\tilde{R}_\xi$, а саме

$$[R_z - \sum_{i,j=1}^{n} b_{i,j}(z)(\cdot, n_i(\bar{z}))m_j(z)] - [R_\xi - \sum_{i,j=1}^{n} b_{i,j}(\xi)(\cdot, n_i(\bar{\xi}))m_j(\xi)]$$

$$= (z-\xi)[R_z - \sum_{i,j=1}^{n} b_{i,j}(z)(\cdot, n_i(\bar{z}))m_j(z)] \cdot [R_\xi - \sum_{i,j=1}^{n} b_{i,j}(\xi)(\cdot, n_i(\bar{\xi}))m_j(\xi)]$$

$$= R_z - \sum_{i,j=1}^{n} b_{i,j}(z)(\cdot, n_i(\bar{z}))m_j(z) - R_\xi + \sum_{i,j=1}^{n} b_{i,j}(\xi)(\cdot, n_i(\bar{\xi}))m_j(\xi)$$

$$= (z-\xi)R_zR_\xi - (z-\xi)\sum_{i,j=1}^{n} b_{i,j}(\xi)(\cdot, n_i(\bar{\xi}))R_zm_j(\xi) - (z-\xi)\sum_{i,j=1}^{n} b_{i,j}(z)(\cdot, R_{\bar{\xi}}n_i(\bar{z}))m_j(z)$$

$$+(z-\xi)\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{p,q=1}^{n} b_{i,j}(z)b_{p,q}(\xi)(m_q(\xi),n_i(\bar z))(\cdot,n_p(\bar z))m_j(z).$$

Використовуючи тотожність Гільберта для R_z та рівності

$$(z-\xi)R_z m_j(\xi)=m_j(z)-m_j(\xi),\ \ (\bar z-\bar\xi)R_{\bar\xi}n_i(\bar z)=n_i(\bar z)-n_i(\bar\xi),$$

які випливають з (16), отримуємо:

$$\sum_{i,j=1}^{n} b_{i,j}(\xi)(\cdot,n_i(\bar\xi))m_j(\xi)-\sum_{i,j=1}^{n} b_{i,j}(z)(\cdot,n_i(\bar z))m_j(z)$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n} b_{i,j}(\xi)(\cdot,n_i(\bar\xi))[m_j(z)-m_j(\xi)]-\sum_{i,j=1}^{n} b_{i,j}(z)(\cdot,[n_i(\bar z)-n_i(\bar\xi)])m_j(z)$$

$$+(z-\xi)\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{p,q=1}^{n} b_{i,j}(z)b_{p,q}(\xi)(m_q(\xi),n_i(\bar z))(\cdot,n_p(\bar z))m_j(z).$$

Розкриваємо квадратні дужки і зводимо подібні

$$0=\sum_{i,j=1}^{n} b_{i,j}(\xi)(\cdot,n_i(\bar\xi))m_j(z)-\sum_{i,j=1}^{n} b_{i,j}(z)(\cdot,n_i(\bar\xi))m_j(z)$$

$$+(z-\xi)\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{p,q=1}^{n} b_{i,j}(z)b_{p,q}(z)(m_q(\xi),n_i(\bar z))(\cdot,n_p(\bar z))m_j(z).$$

Оскільки в останній рівності у всіх доданків є однаковий компонент $\sum\limits_{i,j=1}^{n}(\cdot,n_i(\bar\xi))m_j(z)$, то

$$0=G^{-1}(\xi)-G^{-1}(z)+(z-\xi)G^{-1}(\xi)\Gamma(m_q(\xi),n_j(\bar z))G^{-1}(z),$$

де, нагадаємо, $-G^{-1}(z)=\{b_{i,j}(z)\}_{i,j=1}^{n}$. І після переходу до $G(\xi)$ і $G(z)$ отримуємо (17).

Покажемо другу з умов існування резольвенти. Для вектора $f\in\mathcal{H}$, такого що $f\perp n_j(\bar z)$, $j=1,2,...,n$, очевидно маємо $\tilde R_z f=R_z f$.

Нагадаємо, що оскільки всі δ_j, $j=1,2,...,n$, вважаються лінійно незалежними, то і, при $z\in\rho(A)$, вектори $n_j(z)=(A-z)^{-1}\delta_j$ також є лінійно незалежними. Тому знайдеться вектор $f\in\mathcal{H}$, такий що $f\not\perp n_i(\bar z)$ і $f\perp n_j(\bar z)$, $j=1,2,...,n$, $j\neq i$, при кожному фіксованому $i=1,2,...,n$. Для такого вектора

$$\tilde R_z f=R_z f+\sum_{j=1}^{n} b_{i,j}(f,n_i(\bar z))m_j(z)\neq 0.$$

Якби $R_z f=-\sum\limits_{j=1}^{n} b_{i,j}(f,n_i(\bar z))m_j(z)$, то це означало б, що з одного боку $\mathrm{span}\{m_j(z)\}\in\mathcal{H}_{+2}$, а за умови теореми $\mathrm{span}\{m_j(z)\}\in\mathcal{H}\setminus\mathcal{H}_{+1}$.

Отже $\tilde R_z$ є резольвентою деякого замкненого оператора, який можна позначити через $\tilde A$. Той факт, що A і $\tilde A$ збігаються на деякій щільній множині, випливає з умови $\mathrm{span}\{m_j(z)\}\in\mathcal{H}\setminus\mathcal{H}_{+1}$. Аналогічно, той факт, що A і $\tilde A^*$ збігаються на деякій щільній множині, випливає з умови $\mathrm{span}\{n_j(z)\}\in\mathcal{H}\setminus\mathcal{H}_{+1}$. $\square$

Зауваження 9. *З теореми 2 випливає, зокрема, і той факт, що область визначення сингулярно збуреного оператора в означенні 1 не залежить від вибору $z \in \rho(A)$.*

Зауваження 10. *Для оператора $\tilde{A}^*$ також можна сформулювати і довести теорему, аналогічну до теореми 2.*

Зауваження 11. *Питання, коли збурений рангу n оператор класу $\mathcal{H}_{-2}$ можна описати методами класу $\mathcal{H}_{-1}$, як це було показано для рангу один в [8, 9], планується розглянути в окремій публікації. Також планується і окремо показати мішані форми збурень, наприклад, $\tilde{A} \in \mathcal{P}^n_{-2}(A)$ водночас $\tilde{A}^* \in \mathcal{P}^n_{-1}(A)$, чи взагалі $\tilde{A}^*$ – регулярне збурення, або навпаки по відношенню до A і $\tilde{A}$, та інше.*

5 Приклад

Наведемо наочний, порівняно легко обчислювальний, приклад, властивий виключно для збуреного оператора класу $\mathcal{H}_{-2}$, який ілюструє основні твердження роботи.

Нехай в гільбертовому просторі $\mathcal{H} = L_2 := L_2([0,\infty], dx)$ заданий оператор A – множення на "x^2", тобто

$$Af(x) = x^2 f(x),\ f \in \mathfrak{D}(A) := \{f(x) \in L_2 \mid x^2 f(x) \in L_2\}.$$

У такому разі

$$\mathcal{H}_{+1} = L_2([1,\infty], (x^2+1)dx),\ \mathcal{H}_{-1} = L_2([1,\infty], \frac{1}{(x^2+1)}dx),$$

$$\mathcal{H}_{+2} = L_2([1,\infty], (x^2+1)^2 dx),\ \mathcal{H}_{-2} = L_2([1,\infty], \frac{1}{(x^2+1)^2}dx).$$

Розглянемо сингулярне рангу два несиметричне збурення:

$$\tilde{A} = A + \alpha_1 \langle \cdot, \omega_1 \rangle \delta_1 + \alpha_2 \langle \cdot, \omega_2 \rangle \delta_2,$$

де $\omega_1 = x$, $\delta_1 = x - 1$, $\omega_2 = x + 1$, $\delta_2 = x$. Легко перевірити, що $\omega_i \in \mathcal{H}_{-2} \setminus \mathcal{H}_{-1}$, $\delta_i \in \mathcal{H}_{-2} \setminus \mathcal{H}_{-1}$, $i = 1, 2$. Таким чином маємо збурений оператор заданий формальним виразом,:

$$\tilde{A}f(x) = xf(x) + \alpha_1(x-1)\int_0^\infty f(x)x\,dx + \alpha_2 x \int_0^\infty f(x)(x+1)\,dx,$$

оскільки він і його спряжений належать до класу $\mathcal{H}_{-2}$. Згідно означення 1 запишемо його область визначення, де, для простоти обчислень, покладемо $z = i$. Для цього спочатку обчислимо величини:

$$(A-z)^{-1}(1+zA)(A^2+1)^{-1} = (A-i)^{-1}(1+iA)(A^2+1)^{-1}$$

$$= \frac{1+ix^2}{(x^2-i)(x^4+1)} = \frac{(1+ix^2)(x^2+i)}{(x^2-i)(x^2+i)(x^4+1)} = i\frac{1}{x^4+1};$$

і далі

$$\langle (A-i)^{-1}(1+iA)(A^2+1)^{-1}\delta_1,\omega_1\rangle = i\int\limits_0^\infty \frac{x^2-x}{(x^4+1)}\,dx = i\frac{\sqrt{2}-1}{4}\pi,$$

$$\langle (A-i)^{-1}(1+iA)(A^2+1)^{-1}\delta_1,\omega_2\rangle = i\int\limits_0^\infty \frac{x^2-1}{(x^4+1)}\,dx = 0,$$

$$\langle (A-i)^{-1}(1+iA)(A^2+1)^{-1}\delta_2,\omega_1\rangle = i\int\limits_0^\infty \frac{x^2}{(x^4+1)}\,dx = i\frac{\sqrt{2}\pi}{16},$$

$$\langle (A-i)^{-1}(1+iA)(A^2+1)^{-1}\delta_2,\omega_2\rangle = i\int\limits_0^\infty \frac{x^2+x}{(x^4+1)}\,dx = i\frac{\sqrt{2}+1}{4}\pi.$$

Тоді для $S := (A-i)^{-1}(1+iA)(A^2+1)^{-1}$, маємо

$$\Delta = \det\begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha_1}+\tau_{11}+\langle S\delta_1,\omega_1\rangle & \tau_{12}+\langle S\delta_1,\omega_2\rangle \\ \tau_{21}+\langle S\delta_2,\omega_1\rangle & \frac{1}{\alpha_2}+\tau_{22}+\langle S\delta_2,\omega_2\rangle \end{vmatrix}$$

$$= \det\begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha_1}+\tau_{11}+i\frac{\sqrt{2}-1}{4}\pi & \tau_{12} \\ \tau_{21}+i\frac{\sqrt{2}\pi}{16} & \frac{1}{\alpha_2}+\tau_{22}+i\frac{\sqrt{2}+1}{4}\pi \end{vmatrix}.$$

При цьому

$$(\tilde{A}-i)^{-1}\delta_1 = \frac{\frac{1}{\alpha_2}+\tau_{22}+i\frac{\sqrt{2}+1}{4}\pi}{\Delta}(A-i)^{-1}\delta_1 - \frac{\tau_{21}+i\frac{\sqrt{2}\pi}{16}}{\Delta}(A-i)^{-1}\delta_2$$

$$= \frac{\frac{1}{\alpha_2}+\tau_{22}+i\frac{\sqrt{2}+1}{4}\pi}{\Delta}\frac{x-1}{x-i} - \frac{\tau_{21}+i\frac{\sqrt{2}\pi}{16}}{\Delta}\frac{x}{x-i},$$

$$(\tilde{A}-i)^{-1}\delta_2 = -\frac{\tau_{12}}{\Delta}(A-i)^{-1}\delta_1 + \tau_{11} + \frac{\frac{1}{\alpha_1}+i\frac{\sqrt{2}-1}{4}\pi}{\Delta}A^{-1}\delta_2$$

$$= -\frac{\tau_{12}}{\Delta}\frac{x}{x-i} + \frac{\frac{1}{\alpha_1}+\tau_{11}+i\frac{\sqrt{2}-1}{4}\pi}{\Delta}\frac{x-1}{x-i}.$$

Отже область визначення $\mathfrak{D}(\tilde{A})$ складається із векторів вигляду:

$$\vartheta(x) = \varphi(x) - \left(\frac{1}{\alpha_2}+\tau_{22}+i\frac{\sqrt{2}+1}{4}\pi\right)\frac{1}{\Delta}\frac{x-1}{x-i}\int\limits_0^\infty \varphi(x)x\,dx$$

$$+ \left(\tau_{21}+i\frac{\sqrt{2}\pi}{16}\right)\frac{1}{\Delta}\frac{x}{x-i}\int\limits_0^\infty \varphi(x)x\,dx$$

$$+ \frac{\tau_{12}}{\Delta}\frac{x-1}{x-i}\int\limits_0^\infty \varphi(x)(x+1)\,dx$$

$$- \left(\frac{1}{\alpha_1}+\tau_{11}+i\frac{\sqrt{2}-1}{4}\pi\right)\frac{1}{\Delta}\frac{x}{x-i}\int\limits_0^\infty \varphi(x)(x+1)\,dx, \quad \varphi(x)\in\mathfrak{D}(A).$$

А дія резольвенти оператора в точці $z=i$ на вектор має вигляд:

$$(\tilde{A}-i)^{-1}f(x)=\frac{1}{x-i}f(x)-\left(\frac{1}{\alpha_2}+\tau_{22}+i\frac{\sqrt{2}+1}{4}\pi\right)\frac{1}{\Delta}\frac{x-1}{x-i}\int\limits_0^\infty f(x)\frac{x}{x-i}\,dx$$

$$+\left(\tau_{21}+i\frac{\sqrt{2}\pi}{16}\right)\frac{1}{\Delta}\frac{x}{x-i}\int\limits_0^\infty f(x)\frac{x}{x-i}\,dx$$

$$+\frac{\tau_{12}}{\Delta}\frac{x-1}{x-i}\int\limits_0^\infty \varphi\frac{x+1}{x-i}\,dx$$

$$-\left(\frac{1}{\alpha_1}+\tau_1+i\frac{\sqrt{2}-1}{4}\pi\right)\frac{1}{\Delta}\frac{x}{x-i}\int\limits_0^\infty f(x)\frac{x+1}{x-i}\,dx,\quad f(x)\in L_2.$$

Параметри $\tau_{i,j}\in\mathbb{C},\ \ i,j=1,2$ є довільними числами.

Список літератури

[1] Альбеверио С., Гестези Ф., Хёэг-Крон Р., Хольден Х. Решаемые модели в квантовой механике. Пер. с Р47 англ. Мир, Москва, 1991.

[2] Albeverio S., Kurasov P. Singular perturbations of differential operators; solvable Schrödinger type operators. Univ. Press, Cambridge, 2000.

[3] Albeverio S., Nizhnik L. *Schrödinger operators with nonlocal point interactions.* J. Math. Anal. Appl. 2007, **332**, 884–895. doi:10.1016/j.jmaa.2006.10.070

[4] Albeverio S., Hryniv R., Nizhnik L. *Inverse spectral problems for nonlocal Sturm-Liouville operators* Inverse Problems 2007, **23**. 523–535. doi:10.1088/0266-5611/23/2/005

[5] Вишик М.И. *Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений* Тр. Моск. Матем. Об-ва 1952, **1**. 187–246. (in Russian)

[6] Дудкін М.Є. *Сингулярно збурені нормальні оператори* Укр. мат. журн. 1999, **51**, № (8), 1045–1053.

[7] Dudkin M.E., Nizhnik L.P. *Singularly perturbed normal operators* Methods Funct. Anal. Topology 2010, **16**, (4), 298–303.

[8] Dudkin M.E., Vdovenko T.I. *Dual pair of eigenvalues in rank one singular perturbations* Matematychni Studii 2017, **48**, (2), 156–164. doi:10.15330/ms.48.2.156-164

[9] Dudkin M.E., Vdovenko T.I. *On extensions of linear functionals with applications to non-symmetrically singular perturbations* Methods Funct. Anal. Topology 2018, **24**, (3), 193–206.

[10] Mityagin B.S. *The Spectrum of a Harmonic Oscillator Operator Perturbed δ-Interactions* Integr. Equ. Oper. Theory 2016, **85**, 451–495. doi:10.1007/s00020-016-2307-0

[11] Като Т. Теория возмущений линейных операторов. Мир, Москва, 1972.

Список літератури

[1] Albeverio S., Gesztesy F., Høegh-Krohn R., Holden H. Solvable Models in Quantum Mechanics. Second edition. With an appendix by Pavel Exner. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2005.

[2] Albeverio S., Kurasov P. Singular perturbations of differential operators; solvable Schrödinger type operators. Univ. Press, Cambridge, 2000.

[3] Albeverio S., Nizhnik L. *Schrödinger operators with nonlocal point interactions.* J. Math. Anal. Appl. 2007, **332**, 884–895. doi:10.1016/j.jmaa.2006.10.070

[4] Albeverio S., Hryniv R., Nizhnik L. *Inverse spectral problems for nonlocal Sturm-Liouville operators* Inverse Problems 2007, **23**. 523–535. doi:10.1088/0266-5611/23/2/005

[5] Vishik M.I. *On general boundary-value problems for elliptic differential equation* Trudy Moskow. Mat. Obshchestva 1952, **1**, 187–246. (in Russian)

[6] Dudkin M.E. *Singularly perturbed normal operators*, Ukrain. Mat. J. 1999, **51**, (8), 1177–1187. doi: 10.1007/BF02592506 (translation of Ukrain. Mat. Zh. 1999 **51**, (8), 1045–1053. (Ukrainian))

[7] Dudkin M.E., Nizhnik L.P. *Singularly perturbed normal operators* Methods Funct. Anal. Topology 2010, **16**, (4), 298–303.

[8] Dudkin M.E., Vdovenko T.I. *Dual pair of eigenvalues in rank one singular perturbations* Matematychni Studii 2017, **48**, (2), 156–164. doi:10.15330/ms.48.2.156-164

[9] Dudkin M.E., Vdovenko T.I. *On extensions of linear functionals with applications to non-symmetrically singular perturbations* Methods Funct. Anal. Topology 2018, **24**, (3), 193–206.

[10] Mityagin B.S. *The Spectrum of a Harmonic Oscillator Operator Perturbed δ-Interactions* Integr. Equ. Oper. Theory 2016, **85**, 451–495. doi:10.1007/s00020-016-2307-0

[11] Kato T. Perturbation theory for linear operators. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 132, Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1966. doi:10.1007/978-3-642-66282-9

Надійшло 15.04.2021

Dudkin M.E., Dyuzhenkova O.Y. *Singularly finite rank nonsymmetric perturbations $\mathcal{H}_{-2}$-class of a self-adjoint operator*, Bukovinian Math. Journal. **9**, 1 (2021), 140–151.

The singular nonsymmetric rank one perturbation of a self-adjoint operator from classes $\mathcal{H}_{-1}$ and $\mathcal{H}_{-2}$ was considered for the first time in works by Dudkin M.E. and Vdovenko T.I. [8, 9]. In the mentioned papers, some properties of the point spectrum are described, which occur during such perturbations.

This paper proposes generalizations of the results presented in [8, 9] and [2] in the case of nonsymmetric class $\mathcal{H}_{-2}$ perturbations of finite rank. That is, the formal expression of the following is considered

$$\tilde{A} = A + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle \cdot, \omega_j \rangle \delta_j,$$

where A is an unperturbed self-adjoint operator on a separable Hilbert space $\mathcal{H}$, $\alpha_j \in \mathbb{C}$, ω_j, δ_j, $j = 1, 2, ..., n < \infty$ are vectors from the negative space $\mathcal{H}_{-2}$ constructed by the operator A, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is the dual scalar product between positive and negative spaces.