Грушка Я.І.

КРИТЕРІЙ ТРАНСЛЯЦІЙНОЇ ОДНОСТАЙНОЇ ПОСТУПАЛЬНОСТІ ДЛЯ ОПЕРАТОРІВ ПЕРЕТВОРЕННЯ КООРДИНАТ ТА СИСТЕМ ВІДЛІКУ В УНІВЕРСАЛЬНИХ КІНЕМАТИКАХ

В даній роботі введено поняття трансляційно одностайно-поступальних операторів перетворення координат і показано, що такі оператори описують перетворення координат з рухомої трансляційно одностайно-поступальної системи відліку в задану нерухому систему відліку у векторних універсальних кінематиках. Також в роботі описано загальну структуру трансляційно одностайно-поступальних операторів перетворення координат (це — основний результат роботи). Використовуючи цей результат, отримано необхідну і достатню умову трансляційної одностайної поступальності однієї системи відліку відносно іншої у векторних універсальних кінематиках.

Ключові слова і фрази: універсальні кінематики, мінливі множини, системи відліку, лінійні координатні простори, оператори перетворення координат, трансляційна одностайна поступальність.

Інститут математики НАН України, Київ, Україна (Грушка Я.І.)
e-mail: *grushka@imath.kiev.ua (Грушка Я.І.)*

Вступ

Універсальні кінематики (тобто кінематичні мінливі множини із заданим універсальним перетворенням координат) були введені в роботі [6]. Основні властивості універсальних кінематик досліджувались в роботах [6, 5, 7, та ін.]. Найбільш детально теорію універсальних кінематик викладено в [8, Part III]. Теорія універсальних кінематик базується на теорії мінливих множин [2, 4, 8, та ін.]. З інтуїтивної точки зору мінливі множини являють собою сукупності об'єктів, які, на відміну від елементів звичайних (статичних) множин, можуть перебувати в процесі постійних трансформацій (тобто еволюції), зокрема змінювати свої властивості в часі, розпадатись на частини, чи навпаки — об'єднуватись в одне ціле. Крім того, характер еволюції мінливої множини та її компонентів може змінюватись залежно від способу спостереження, тобто від системи відліку. Універсальні кінематики являють собою математичні структури, в яких мінливі множини оснащені різноманітними геометричними та топологічними

УДК 51-71 + 517.988.5
2010 *Mathematics Subject Classification:* 83A05, 47H99.

об'єктами, а саме, метричними, топологічними, лінійними, банаховими, гільбертовими та іншими просторами і в яких визначено певне універсальне перетворення координат між системами відліку. Дослідження універсальних кінематик може мати застосування в астрофізиці, оскільки існує припущення, що у великих масштабах Всесвіту закони фізики (зокрема закони кінематики) можуть бути відмінними від класичних, тобто тих, які діють в околі нашої сонячної системи.

Поняття одностайно-поступальних (скорочено — одностайних) та трансляційно одностайно-поступальних (скорочено — т-одностайних) систем відліку у векторних універсальних кінематиках було введено в роботі [10]. Одностайні та т-одностайні системи відліку цікаві тим, що для таких систем відліку можна дати чітке і однозначне означення переміщення рухомої системи відліку відносно нерухомої, яке не залежить від вибору нерухомої точки в рухомій системі відліку. В роботі [9] показано, що система відліку $\mathfrak{m}$ є одностайною відносно системи відліку $\mathfrak{l}$ (у деякій векторній універсальній кінематиці) тоді і тільки тоді, коли оператор перетворення координат з системи відліку $\mathfrak{m}$ в систему відліку $\mathfrak{l}$ є одностайним (одностайно-поступальним). Також в заданій роботі описано загальну структуру одностайних операторів перетворення координат і, використовуючи цей результат, отримано необхідну і достатню умову одностайної поступальності для систем відліку в універсальних кінематиках. В даній роботі буде отримано аналогічні результати для т-одностайних операторів перетворення координат та систем відліку. А саме, буде описано загальну структуру т-одностайних операторів перетворення координат і, використовуючи цей результат, буде отримано необхідну і достатню умову трансляційної одностайної поступальності для систем відліку в універсальних кінематиках.

1 Трансляційна одностайна поступальність і оператори перетворення координат

Поняття координатного простору та векторного координатного простору було введено в роботі [3] в рамках побудови теорії кінематичних мінливих множин (див. також [8, Part II, Subsection 14.1]). Для читачів, котрі не мають часу або бажання знайомитись з основами цієї теорії, можна прийняти наступне (спрощене) означення цього поняття:

В цій статті під ***координатним простором*** будемо розуміти математичний об'єкт $\mathfrak{Q}$ одного з наступних трьох типів:

1. $\mathfrak{Q} = (\mathfrak{X}, \mathcal{T})$ — топологічний простір;
2. $\mathfrak{Q} = (\mathfrak{X}, \mathbb{K}, +, \times)$ — векторний (лінійний) простір;
3. $\mathfrak{Q} = (\mathfrak{X}, \mathbb{K}, +, \times, \mathcal{T})$ — топологічний векторний простір,

де $\mathcal{T}$ є топологією на множині $\mathfrak{X}$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ — поле дійсних або комплексних чисел, а $+$ та $\times$ є бінарними операціями додавання векторів з $\mathfrak{X}$ та множення векторів з $\mathfrak{X}$ на скаляри з поля $\mathbb{K}$. В усіх трьох випадках множину $\mathfrak{X}$ позначатимемо через $\mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$:

$$\mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}) := \mathfrak{X}.$$

При цьому в першому та третьому випадках простір $\mathfrak{Q}$ називатимемо ***топологічним координатним простором***, в другому та третьому випадках — ***векторним*** координатним простором, в третьому випадку — ***топологічним векторним*** координатним простором.

Прийнятого вище означення цілком достатньо для розуміння основних розділів, тобто розділів 1 та 3 даної статті. Взагалі, в цій статті будуть зустрічатися, в основному, лінійні координатні простори (тобто, фактично, лінійні простори).

Нагадаємо [1, стор. 12], що лінійно упорядкованою множиною називається реляційна система виду $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ з одним рефлексивним, асиметричним і транзитивним бінарним відношенням $\leq$, таким, що для довільних $t, \tau \in \mathbf{T}$ виконується хоча б одна з умов $t \leq \tau$ або $\tau \leq t$ (при цьому вважається, що $\mathbf{T} \neq \varnothing$).

Означення 1. *Нехай, $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2$ — координатні простори, а $\mathbb{T}_1 = (\mathbf{T}_1, \leq_1)$ і $\mathbb{T}_2 = (\mathbf{T}_2, \leq_2)$ — довільні лінійно упорядковані множини. Довільну бієкцію $\mathscr{U} : \mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1) \to \mathbf{T}_2 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$ між $\mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$ і $\mathbf{T}_2 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$ будемо називати оператором перетворення координат* (ОПК) *з $(\mathbb{T}_1, \mathfrak{Q}_1)$ в $(\mathbb{T}_2, \mathfrak{Q}_2)$. Множину всіх ОПК з $(\mathbb{T}_1, \mathfrak{Q}_1)$ в $(\mathbb{T}_2, \mathfrak{Q}_2)$ будемо позначати через:*

$$\mathbb{P}\mathbf{k}(\mathbb{T}_1, \mathfrak{Q}_1; \mathbb{T}_2, \mathfrak{Q}_2)$$

(тут $\mathbf{T} \times \mathcal{X} = \{(t, x) \mid t \in \mathbf{T},\ x \in \mathcal{X}\}$ означає декартовий добуток множин $\mathbf{T}$ і $\mathcal{X}$).

Зауважимо, що множина $\mathbb{P}\mathbf{k}(\mathbb{T}_1, \mathfrak{Q}_1; \mathbb{T}_2, \mathfrak{Q}_2)$ непорожня тоді і тільки тоді, коли множини $\mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$ і $\mathbf{T}_2 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$ — рівнопотужні $(\mathbf{card}(\mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)) = \mathbf{card}(\mathbf{T}_2 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)))$.

В цій статті будуть використовуватись такі абревіатури:

ОПК — оператор (оператори) перетворення координат.

КП — координатний простір (координатні простори).

ВКП — векторний (векторні) КП.

Нехай, $\mathscr{U} \in \mathbb{P}\mathbf{k}(\mathbb{T}_1, \mathfrak{Q}_1; \mathbb{T}_2, \mathfrak{Q}_2)$. ***Траєкторією*** точки $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$ відносно ОПК $\mathscr{U} \in \mathbb{P}\mathbf{k}(\mathbb{T}_1, \mathfrak{Q}_1; \mathbb{T}_2, \mathfrak{Q}_2)$ будемо називати множину:

$$\mathbf{trj}_{\mathscr{U}}(\mathrm{x}) := \{\mathscr{U}(t, \mathrm{x}) \mid t \in \mathbf{T}_1\} \subseteq \mathbf{T}_2 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2). \tag{1}$$

Нехай, $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ — довільна лінійно упорядкована множина і $\mathcal{X}$ — довільна множина. Для довільної пари $\omega = (t, x) \in \mathbf{T} \times \mathcal{X}$ будемо використовувати позначення:

$$\mathsf{bs}(\omega) := x, \quad \mathsf{tm}(\omega) := t. \tag{2}$$

Означення 2. *Нехай, $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2$ — КП і $\mathbb{T}_1 = (\mathbf{T}_1, \leq_1)$, $\mathbb{T}_2 = (\mathbf{T}_2, \leq_2)$ — лінійно упорядковані множини. ОПК $\mathscr{U} \in \mathbb{P}\mathbf{k}(\mathbb{T}_1, \mathfrak{Q}_1; \mathbb{T}_2, \mathfrak{Q}_2)$ будемо називати **траєкторно регулярним**, якщо для довільного $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$ траєкторія $\mathbf{trj}_{\mathscr{U}}(\mathrm{x})$ є функцією з $\mathbf{T}_2$ в $\mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$ (тобто якщо $\forall \mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \in \mathbf{trj}_{\mathscr{U}}(\mathrm{x})$ з рівності $\mathsf{tm}(\mathrm{w}_1) = \mathsf{tm}(\mathrm{w}_2)$ випливає рівність $\mathsf{bs}(\mathrm{w}_1) = \mathsf{bs}(\mathrm{w}_2)$, а отже і рівність $\mathrm{w}_1 = \mathrm{w}_2$).*

Означення 3. *Нехай, $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2$ — ВКП, а $\mathbb{T}_1 = (\mathbf{T}_1, \leq_1)$, $\mathbb{T}_2 = (\mathbf{T}_2, \leq_2)$ — лінійно упорядковані множини. ОПК $\mathscr{U} \in \mathbb{P}\mathbf{k}(\mathbb{T}_1, \mathfrak{Q}_1; \mathbb{T}_2, \mathfrak{Q}_2)$ будемо називати* ***трансляційно одностайно поступальним*** *(скорочено —* ***т-одностайним****), якщо для довільних $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2 \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$, $t_1, t_1', t_2, t_2' \in \mathbf{T}_1$, $\tau, \tau' \in \mathbf{T}_2$, $\mathrm{y}_1, \mathrm{y}_1', \mathrm{y}_2, \mathrm{y}_2' \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$ з умов:*

$$\mathscr{U}(t_i, \mathrm{x}_i) = (\tau, \mathrm{y}_i), \quad \mathscr{U}(t_i', \mathrm{x}_i) = (\tau', \mathrm{y}_i') \qquad \left(i \in \overline{1,2}\right),$$

випливає рівність:

$$\mathrm{y}_2 - \mathrm{y}_1 = \mathrm{y}_2' - \mathrm{y}_1'.$$

Твердження 1. *Якщо ОПК $\mathscr{U} \in \mathbb{P}\mathbf{k}(\mathbb{T}_1, \mathfrak{Q}_1; \mathbb{T}_2, \mathfrak{Q}_2)$ (де $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2$ — ВКП) є т-одностайним, то він є траєкторно регулярним.*

Доведення. Нехай, $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2$ — ВКП і ОПК $\mathscr{U} \in \mathbb{P}\mathbf{k}(\mathbb{T}_1, \mathfrak{Q}_1; \mathbb{T}_2, \mathfrak{Q}_2)$ є т-одностайним (де $\mathbb{T}_i = (\mathbf{T}_i, \leq_i)$, $i \in \overline{1,2}$). Розглянемо довільний вектор $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$. Припустимо, що $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \in \mathbf{trj}_{\mathscr{U}}(\mathrm{x})$ і $\mathsf{tm}(\mathrm{w}_1) = \mathsf{tm}(\mathrm{w}_2)$. Покладемо: $\tau := \mathsf{tm}(\mathrm{w}_1) = \mathsf{tm}(\mathrm{w}_2)$, $\mathrm{y}_1 := \mathsf{bs}(\mathrm{w}_1)$, $\mathrm{y}_2 = \mathsf{bs}(\mathrm{w}_2)$. Оскільки $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \in \mathbf{trj}_{\mathscr{U}}(\mathrm{x})$ і $\mathsf{tm}(\mathrm{w}_1) = \mathsf{tm}(\mathrm{w}_2) = \tau$, то за означенням траєкторії $\mathbf{trj}_{\mathscr{U}}(\mathrm{x})$ (див. (1)), існують елементи $t_1, t_2 \in \mathbf{T}_1$ такі, що $\mathscr{U}(t_i, \mathrm{x}) = \mathrm{w}_i = (\tau, \mathrm{y}_i)$ $(i \in \overline{1,2})$. Звідси отримуємо:

$$\begin{aligned}
&\mathscr{U}(t_i, \mathrm{x}_i) = (\tau, \mathrm{y}_i) \quad \left(i \in \overline{1,2}\right); \\
&\mathscr{U}(t_i', \mathrm{x}_i) = (\tau', \mathrm{y}_i') \quad \left(i \in \overline{1,2}\right), \\
&\qquad\qquad \text{де } \mathrm{x}_1 = \mathrm{x}_2 = \mathrm{x},\ t_1' = t_2' = t_1, \quad \mathrm{y}_1' = \mathrm{y}_2' = \mathrm{y}_1,\ \tau' = \tau.
\end{aligned}$$

Оскільки ОПК $\mathscr{U}$ є т-одностайним, то, за означенням 3, з останніх рівностей випливає рівність $\mathrm{y}_2 - \mathrm{y}_1 = \mathrm{y}_2' - \mathrm{y}_1'$, тобто рівність $\mathrm{y}_2 - \mathrm{y}_1 = \mathbf{0}$ (де $\mathbf{0}$ — нульовий вектор ВКП $\mathfrak{Q}_2$). Отже, $\mathrm{y}_1 = \mathrm{y}_2$, тобто $\mathsf{bs}(\mathrm{w}_1) = \mathsf{bs}(\mathrm{w}_2)$. Отже, для довільних $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \in \mathbf{trj}_{\mathscr{U}}(\mathrm{x})$ з рівності $\mathsf{tm}(\mathrm{w}_1) = \mathsf{tm}(\mathrm{w}_2)$ випливає рівність $\mathsf{bs}(\mathrm{w}_1) = \mathsf{bs}(\mathrm{w}_2)$, де $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$ — довільний вектор ВКП $\mathfrak{Q}_1$. Тому, за означенням 2, ОПК $\mathscr{U}$ є траєкторно регулярним. □

Твердження, обернене до твердження 1 в загальному випадку не є справедливим. Прикладом траєкторно регулярного, але не т-одностайного ОПК може служити наступний ОПК $\mathscr{U} \in \mathbb{P}\mathbf{k}(\mathbb{R}, \mathbb{R}; \mathbb{R}, \mathbb{R})$:

$$\mathscr{U}(t, \mathrm{x}) = \left(t, \left(t^2 + 1\right)\mathrm{x}\right) \quad ((t, \mathrm{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}).$$

Зазначимо, що в записі “$\mathscr{U} \in \mathbb{P}\mathbf{k}(\mathbb{R}, \mathbb{R}; \mathbb{R}, \mathbb{R})$”, $\mathbb{R}$ трактується як лінійно упорядкована множина (відносно стандартного числового порядку $\leq$) і як векторний координатний простір над полем дійсних чисел (відносно операцій додавання і множення дійсних чисел) одночасно.

2 Зв'язок між траєкторною регулярністю та т-одностайністю операторів перетворення координат і систем відліку в універсальних кінематиках

В цьому розділі статті дотримуватимемось термінології та системи позначень теорії універсальних кінематик, прийнятої в роботах [8, 6, 5, 7, 10, 9, та ін.]. Наступні два твердження описують зв'язок між поняттями траєкторної регулярності та т-одностайності операторів перетворення координат і траєкторної регулярності та т-одностайності систем відліку в універсальних кінематиках відповідно.

Твердження 2. *Нехай, $\mathcal{F}$ — універсальна кінематика. Система відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ є траєкторно регулярною відносно системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ у кінематиці $\mathcal{F}$ тоді і тільки тоді, коли ОПК $[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m},\, \mathcal{F}] \in \mathbb{P}\mathbf{k}\left(\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{m}), \mathsf{BG}(\mathfrak{m}); \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l}), \mathsf{BG}(\mathfrak{l})\right)$ є траєкторно регулярним.*

Доведення випливає з означення траєкторно регулярних систем відліку (див. [10, означення 5, п. 1]) та означення 2.

Твердження 3. *Нехай, $\mathcal{F}$ — векторна універсальна кінематика. Система відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ є т-одностайною (в сенсі [10, означення 6]) відносно системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ у кінематиці $\mathcal{F}$ тоді і тільки тоді, коли ОПК $[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m},\, \mathcal{F}] \in \mathbb{P}\mathbf{k}\left(\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{m}), \mathsf{BG}(\mathfrak{m}); \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l}), \mathsf{BG}(\mathfrak{l})\right)$ є т-одностайним.*

Доведення випливає з означення т-одностайних систем відліку (див. [10, означення 6]) та означення 3.

3 Критерій трансляційної одностайної поступальності для операторів перетворення координат

Нижче формулюється основна теорема: критерій трансляційної одностайної поступальності (т-одностайності) для операторів перетворення координат. Ця теорема описує загальну структуру таких операторів.

Теорема 1. *Нехай, $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2$ — ВКП, а $\mathbb{T}_1 = (\mathbf{T}_1, \leq_1)$, $\mathbb{T}_2 = (\mathbf{T}_2, \leq_2)$ — лінійно упорядковані множини. Відображення:*

$$\mathscr{U} : \mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}\left(\mathfrak{Q}_1\right) \to \mathbf{T}_2 \times \mathbf{Zk}\left(\mathfrak{Q}_2\right)$$

є т-одностайним ОПК тоді і тільки тоді, коли його можна подати у вигляді:

$$\mathscr{U}\left(t, \mathrm{x}\right) = \left(\Phi\left(t, \mathrm{x}\right), \mathbf{F}\left(\mathrm{x}, \Phi\left(t, \mathrm{x}\right)\right)\right) \quad \left(t, \mathrm{x}\right) \in \mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}\left(\mathfrak{Q}_1\right), \tag{3}$$

де функції:

$$\begin{aligned} &\Phi : \mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}\left(\mathfrak{Q}_1\right) \to \mathbf{T}_2 \quad i \\ &\mathbf{F} : \mathcal{D} \to \mathbf{Zk}\left(\mathfrak{Q}_2\right), \\ &\qquad \mathcal{D} = \bigcup_{\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)} \{\mathrm{x}\} \times \Phi\left(\left[\mathbf{T}_1\right], \mathrm{x}\right) = \bigcup_{\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)} \{\mathrm{x}\} \times \left\{\Phi\left(t, \mathrm{x}\right) \mid t \in \mathbf{T}_1\right\}, \end{aligned}$$

задовольняють такі умови:

1) *Для довільного елемента $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}\left(\mathfrak{Q}_1\right)$ функція $\Phi_{(\mathrm{x})}\left(t\right) = \Phi\left(t, \mathrm{x}\right)$ $\left(t \in \mathbf{T}_1\right)$ є ін'єктивним відображенням з $\mathbf{T}_1$ в $\mathbf{T}_2$.*

2) *Для довільних $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2 \in \mathbf{Zk}\left(\mathfrak{Q}_1\right)$ таких, що $\mathrm{x}_1 \neq \mathrm{x}_2$ існує вектор $\mathbf{c} = \mathbf{c}_{\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2} \in \mathbf{Zk}\left(\mathfrak{Q}_2\right)$ такий, що $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ і $\mathbf{F}\left(\mathrm{x}_2, \tau\right) - \mathbf{F}\left(\mathrm{x}_1, \tau\right) = \mathbf{c}$ $\left(\forall \tau \in \Phi\left(\left[\mathbf{T}_1\right], \mathrm{x}_1\right) \cap \Phi\left(\left[\mathbf{T}_1\right], \mathrm{x}_2\right)\right)$.*

3) *Для довільних* $\tau \in \mathbf{T}_2$ *і* $\mathrm{y} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$ *існує елемент* $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$ *такий, що* $\tau \in \Phi([\mathbf{T}_1], \mathrm{x})$ *і* $\mathbf{F}(\mathrm{x}, \tau) = \mathrm{y}$.

Доведення. **1**. Нехай відображення $\mathscr{U} : \mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1) \to \mathbf{T}_2 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$ можна подати у вигляді (3), де функції Φ та $\mathbf{F}$ задовольняють умови $1), 2), 3)$ даної теореми.

1.a) Доведемо, що $\mathscr{U} \in \mathbb{P}\mathbf{k}(\mathbb{T}_1, \mathfrak{Q}_1; \mathbb{T}_2, \mathfrak{Q}_2)$, тобто що відображення $\mathscr{U}$ є ОПК.

1.a.1) Нехай, $\mathscr{U}(t_1, \mathrm{x}_1) = \mathscr{U}(t_2, \mathrm{x}_2)$. Тоді, згідно з (3), маємо:

$$\Phi(t_1, \mathrm{x}_1) = \Phi(t_2, \mathrm{x}_2)\,; \tag{4}$$

$$\mathbf{F}(\mathrm{x}_1, \Phi(t_1, \mathrm{x}_1)) = \mathbf{F}(\mathrm{x}_2, \Phi(t_2, \mathrm{x}_2))\,. \tag{5}$$

Доведемо, що $\mathrm{x}_1 = \mathrm{x}_2$. Припустимо супротивне: $\mathrm{x}_1 \neq \mathrm{x}_2$. Покладемо, $\tau := \Phi(t_1, \mathrm{x}_1)$. Тоді з формул (4), (5) маємо:

$$\mathbf{F}(\mathrm{x}_1, \tau) = \mathbf{F}(\mathrm{x}_2, \tau)\,. \tag{6}$$

Але, оскільки, згідно з припущенням, $\mathrm{x}_1 \neq \mathrm{x}_2$, то з умови 2) даної теореми випливає, що існує вектор $\mathbf{c} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$ такий, що

$$\mathbf{F}(\mathrm{x}_1, \tau) - \mathbf{F}(\mathrm{x}_2, \tau) = \mathbf{c} \neq \mathbf{0}.$$

Останнє співвідношення суперечить рівності (6). Отже, припущення про те, що $\mathrm{x}_1 \neq \mathrm{x}_2$ — помилкове. Тому:

$$\mathrm{x}_1 = \mathrm{x}_2 \tag{7}$$

З рівностей (4) і (7) отримуємо рівність $\Phi(t_1, \mathrm{x}_1) = \Phi(t_2, \mathrm{x}_1)$. А з останньої рівності та умови 1) даної теореми випливає рівність $t_1 = t_2$. Таким чином, вище було доведено імплікацію:

$$\begin{aligned} &\forall\ (t_1, \mathrm{x}_1)\,, (t_2, \mathrm{x}_2) \in \mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1) \\ &\qquad\qquad ((\mathscr{U}(t_1, \mathrm{x}_1) = \mathscr{U}(t_2, \mathrm{x}_2)) \Rightarrow (t_1 = t_2)\,\&\,(\mathrm{x}_1 = \mathrm{x}_2))\,. \end{aligned} \tag{8}$$

1.a.2) Нехай, $(\tau, \mathrm{y}) \in \mathbf{T}_2 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$. Доведемо, що існує пара $(t, \mathrm{x}) \in \mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$ така, що $\mathscr{U}(t, \mathrm{x}) = (\tau, \mathrm{y})$. З умови 3) даної теореми випливає, що існує вектор $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$ такий, що що $\tau \in \Phi([\mathbf{T}_1], \mathrm{x})$ і

$$\mathbf{F}(\mathrm{x}, \tau) = \mathrm{y}. \tag{9}$$

Оскільки $\tau \in \Phi([\mathbf{T}_1], \mathrm{x})$, то існує елемент $t \in \mathbf{T}_1$ такий, що $\Phi(t, \mathrm{x}) = \tau$. Отже, враховуючи (9), маємо:

$$\Phi(t, \mathrm{x}) = \tau, \quad \mathbf{F}(\mathrm{x}, \Phi(t, \mathrm{x})) = \mathbf{F}(\mathrm{x}, \tau) = \mathrm{y}.$$

Звідси, згідно з (3), маємо:

$$\mathscr{U}(t, \mathrm{x}) = (\tau, \mathrm{y})\,.$$

Таким чином:

$$\forall\,(\tau, \mathrm{y}) \in \mathbf{T}_2 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)\ \exists\,(t, \mathrm{x}) \in \mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)\ \ (\mathscr{U}(t, \mathrm{x}) = (\tau, \mathrm{y}))\,. \tag{10}$$

З формул (8) та (10) випливає, що відображення $\mathscr{U} : \mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1) \to \mathbf{T}_2 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$ є бієкцією між $\mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$ і $\mathbf{T}_2 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$, тобто, згідно з означенням 1:

$$\mathscr{U} \in \mathbb{P}\mathbf{k}(\mathbb{T}_1, \mathfrak{Q}_1; \mathbb{T}_2, \mathfrak{Q}_2).$$

1.б) Доведемо, що ОПК $\mathscr{U}$ є т-одностайним. Нехай, $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_1 \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$, $t_1, t_2, t_1', t_2' \in \mathbf{T}_1$, $\tau, \tau' \in \mathbf{T}_2$, $\mathrm{y}_1, \mathrm{y}_2, \mathrm{y}_1', \mathrm{y}_2' \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$ і

$$\mathscr{U}(t_i, \mathrm{x}_i) = (\tau, \mathrm{y}_i) \quad \left(i \in \overline{1,2}\right); \tag{11}$$

$$\mathscr{U}(t_i', \mathrm{x}_i) = (\tau', \mathrm{y}_i') \quad \left(i \in \overline{1,2}\right). \tag{12}$$

З формул (11), (12) і (3), отримуємо:

$$\begin{aligned}(\Phi(t_i, \mathrm{x}_i), \mathbf{F}(\mathrm{x}_i, \Phi(t_i, \mathrm{x}_i))) = (\tau, \mathrm{y}_i) \quad \left(i \in \overline{1,2}\right);\\ (\Phi(t_i', \mathrm{x}_i), \mathbf{F}(\mathrm{x}_i, \Phi(t_i', \mathrm{x}_i))) = (\tau', \mathrm{y}_i') \quad \left(i \in \overline{1,2}\right).\end{aligned}$$

Звідси маємо, $\Phi(t_i, \mathrm{x}_i) = \tau$, $\Phi(t_i', \mathrm{x}_i) = \tau'$ $\left(i \in \overline{1,2}\right)$ і:

$$\mathbf{F}(\mathrm{x}_i, \tau) = \mathrm{y}_i \quad \left(i \in \overline{1,2}\right), \tag{13}$$

$$\mathbf{F}(\mathrm{x}_i, \tau') = \mathrm{y}_i' \quad \left(i \in \overline{1,2}\right). \tag{14}$$

У випадку $\mathrm{x}_1 \neq \mathrm{x}_2$ з умови 2) даної теореми випливає існування вектора $\mathbf{c} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$ такого, що $\mathbf{F}(\mathrm{x}_2, \tau) - \mathbf{F}(\mathrm{x}_1, \tau) = \mathbf{F}(\mathrm{x}_2, \tau') - \mathbf{F}(\mathrm{x}_1, \tau') = \mathbf{c}$. Тобто, враховуючи (13), (14), маємо рівність:

$$\mathrm{y}_2 - \mathrm{y}_1 = \mathrm{y}_2' - \mathrm{y}_1'. \tag{15}$$

У випадку $\mathrm{x}_1 = \mathrm{x}_2$ з (13), (14) маємо, $\mathrm{y}_1 = \mathrm{y}_2$, $\mathrm{y}_1' = \mathrm{y}_2'$. Отже, і в цьому випадку виконується рівність (15).

Таким чином, для довільних $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_1 \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$, $t_1, t_2, t_1', t_2' \in \mathbf{T}_1$, $\tau, \tau' \in \mathbf{T}_2$, $\mathrm{y}_1, \mathrm{y}_2, \mathrm{y}_1', \mathrm{y}_2' \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$ з умов (11) і (12) випливає рівність (15). Тому, за означенням 3, відображення $\mathscr{U} : \mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1) \to \mathbf{T}_2 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$ є т-одностайним ОПК.

2. Нехай, відображення $\mathscr{U} : \mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1) \to \mathbf{T}_2 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$ є т-одностайним ОПК з $(\mathbb{T}_1, \mathfrak{Q}_1)$ в $(\mathbb{T}_2, \mathfrak{Q}_2)$. Доведемо, що тоді відображення $\mathscr{U}$ можна подати у вигляді (3), де функції Φ і $\mathbf{F}$ задовольняють умови 1), 2), 3) даної теореми.

Покладемо:

$$\Phi(t, \mathrm{x}) := \mathsf{tm}(\mathscr{U}(t, \mathrm{x})) \qquad ((t, \mathrm{x}) \in \mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)). \tag{16}$$

Тоді функція Φ буде відображенням виду, $\Phi : \mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1) \to \mathbf{T}_2$.

2.а) Доведемо, що для довільного $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$ функція $\Phi_{(\mathrm{x})}(t) = \Phi(t, \mathrm{x})$ $(t \in \mathbf{T}_1)$ є ін'єктивним відображенням. Нехай, $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$. Припустимо, що

$$\Phi_{(\mathrm{x})}(t_1) = \Phi_{(\mathrm{x})}(t_2), \quad \text{де} \quad t_1, t_2 \in \mathbf{T}_1. \tag{17}$$

За визначенням траєкторії $\mathbf{trj}_{\mathscr{U}}(\mathrm{x})$ (див. (1)), маємо:

$$\mathscr{U}(t_1, \mathrm{x}), \mathscr{U}(t_2, \mathrm{x}) \in \mathbf{trj}_{\mathscr{U}}(\mathrm{x}). \tag{18}$$

Покладемо:

$$\tau := \Phi_{(\mathrm{x})}(t_1) = \Phi(t_1, \mathrm{x}).$$

Тоді, згідно з (16) та (17), при $i \in \overline{1,2}$ отримаємо:

$$\begin{aligned} \mathscr{U}(t_i, \mathrm{x}) &= (\mathsf{tm}(\mathscr{U}(t_i, \mathrm{x})), \mathsf{bs}(\mathscr{U}(t_i, \mathrm{x}))) = \\ &= (\Phi(t_i, \mathrm{x}), \mathsf{bs}(\mathscr{U}(t_i, \mathrm{x}))) = \\ &= \left(\Phi_{(\mathrm{x})}(t_i), \mathsf{bs}(\mathscr{U}(t_i, \mathrm{x}))\right) = (\tau, \mathsf{bs}(\mathscr{U}(t_i, \mathrm{x}))). \end{aligned} \tag{19}$$

Отже, враховуючи (18), маємо:

$$(\tau, \mathsf{bs}(\mathscr{U}(t_1, \mathrm{x}))), (\tau, \mathsf{bs}(\mathscr{U}(t_2, \mathrm{x}))) \in \mathbf{trj}_{\mathscr{U}}(\mathrm{x}).$$

Отже, для елементів $\mathrm{w}_i = (\tau, \mathsf{bs}(\mathscr{U}(t_i, \mathrm{x})))$ $\left(i \in \overline{1,2}\right)$ маємо, $\mathsf{tm}(\mathrm{w}_1) = \mathsf{tm}(\mathrm{w}_2)$. Звідси, враховуючи твердження 1 та означення 2, отримуємо $\mathrm{w}_1 = \mathrm{w}_2$. Отже, $\mathsf{bs}(\mathrm{w}_1) = \mathsf{bs}(\mathrm{w}_2)$, тобто

$$\mathsf{bs}(\mathscr{U}(t_1, \mathrm{x})) = \mathsf{bs}(\mathscr{U}(t_2, \mathrm{x})). \tag{20}$$

Враховуючи (19) та (20), отримуємо

$$\begin{aligned} \mathscr{U}(t_1, \mathrm{x}) &= (\tau, \mathsf{bs}(\mathscr{U}(t_1, \mathrm{x}))) = \\ &= (\tau, \mathsf{bs}(\mathscr{U}(t_2, \mathrm{x}))) = \mathscr{U}(t_2, \mathrm{x}). \end{aligned}$$

Звідси, оскільки $\mathscr{U} \in \mathbb{P}\mathbf{k}(\mathbb{T}_1, \mathfrak{Q}_1; \mathbb{T}_2, \mathfrak{Q}_2)$, маємо, $t_1 = t_2$.

Таким чином, вище було доведено, що для довільних $t_1, t_2 \in \mathbf{T}_1$ з умови $\Phi_{(\mathrm{x})}(t_1) = \Phi_{(\mathrm{x})}(t_2)$ випливає рівність $t_1 = t_2$. Отже, для будь-якого $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$ відображення $\Phi_{(\mathrm{x})} : \mathbf{T}_1 \to \mathbf{T}_2$ справді є ін'єктивним, тобто функція Φ задовольняє умову 1) даної теореми. Це означає, що для довільного $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$ існує обернене відображення $\Phi_{(\mathrm{x})}^{[-1]} : \Phi([\mathbf{T}_1], \mathrm{x}) \to \mathbf{T}_1$.

2.б) Для довільної пари $(\mathrm{x}, \tau) \in \mathcal{D}$, де $\mathcal{D} = \bigcup\limits_{\widetilde{\mathrm{x}} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)} \{\widetilde{\mathrm{x}}\} \times \Phi([\mathbf{T}_1], \widetilde{\mathrm{x}})$ покладемо:

$$\mathbf{F}(\mathrm{x}, \tau) := \mathsf{bs}\left(\mathscr{U}\left(\Phi_{(\mathrm{x})}^{[-1]}(\tau), \mathrm{x}\right)\right) \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2). \tag{21}$$

Тоді для довільних $t \in \mathbf{T}_1$ і $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$, використовуючи (16) і (21), отримаємо:

$$\begin{aligned} \mathscr{U}(t, \mathrm{x}) &= (\mathsf{tm}(\mathscr{U}(t, \mathrm{x})), \mathsf{bs}(\mathscr{U}(t, \mathrm{x}))) = \\ &= \left(\Phi(t, \mathrm{x}), \mathsf{bs}\left(\mathscr{U}\left(\Phi_{(\mathrm{x})}^{[-1]}\left(\Phi_{(\mathrm{x})}(t)\right), \mathrm{x}\right)\right)\right) = \\ &= \left(\Phi(t, \mathrm{x}), \mathbf{F}\left(\mathrm{x}, \Phi_{(\mathrm{x})}(t)\right)\right) = (\Phi(t, \mathrm{x}), \mathbf{F}(\mathrm{x}, \Phi(t, \mathrm{x}))), \end{aligned} \tag{22}$$

де, згідно з результатом, доведеним в пункті **2.а**), функція $\Phi : \mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1) \to \mathbf{T}_2$ задовольняє умову 1) даної теореми. Доведемо, що функція $\mathbf{F}$ задовольняє умови 2) і 3) даної теореми.

2.б.1). Нехай, $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2 \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$ і $\mathrm{x}_1 \neq \mathrm{x}_2$. У випадку $\Phi([\mathbf{T}_1], \mathrm{x}_1) \cap \Phi([\mathbf{T}_1], \mathrm{x}_2) \neq \varnothing$ виберемо довільний елемент $\tau' = \tau'_{\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2} \in \Phi([\mathbf{T}_1], \mathrm{x}_1) \cap \Phi([\mathbf{T}_1], \mathrm{x}_2)$. Зафіксуємо також довільний вектор $\mathbf{c}_0 \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$ такий, що $\mathbf{c}_0 \neq \mathbf{0}$. Покладемо:

$$\mathbf{c} := \begin{cases} \mathbf{c}_0, & \Phi([\mathbf{T}_1], \mathrm{x}_1) \cap \Phi([\mathbf{T}_1], \mathrm{x}_2) = \varnothing \\ \mathbf{F}(\mathrm{x}_2, \tau') - \mathbf{F}(\mathrm{x}_1, \tau'), & \Phi([\mathbf{T}_1], \mathrm{x}_1) \cap \Phi([\mathbf{T}_1], \mathrm{x}_2) \neq \varnothing. \end{cases} \tag{23}$$

У випадку $\Phi([\mathbf{T}_1], \mathrm{x}_1) \cap \Phi([\mathbf{T}_1], \mathrm{x}_2) = \varnothing$ умова:

$$\mathbf{F}(\mathrm{x}_2, \tau) - \mathbf{F}(\mathrm{x}_1, \tau) = \mathbf{c} \qquad (\forall \tau \in \Phi([\mathbf{T}_1], \mathrm{x}_1) \cap \Phi([\mathbf{T}_1], \mathrm{x}_2)) \tag{24}$$

виконується тривіальним чином (за правилами математичної логіки).

Розглянемо тепер випадок $\Phi([\mathbf{T}_1], \mathrm{x}_1) \cap \Phi([\mathbf{T}_1], \mathrm{x}_2) \neq \varnothing$. Розглянемо довільний елемент $\tau \in \Phi([\mathbf{T}_1], \mathrm{x}_1) \cap \Phi([\mathbf{T}_1], \mathrm{x}_2)$. Для такого елемента τ мусять існувати елементи $t_1, t_2 \in \mathbf{T}_1$ такі, що:

$$\Phi(t_1, \mathrm{x}_1) = \Phi(t_2, \mathrm{x}_2) = \tau. \tag{25}$$

Оскільки $\tau' \in \Phi([\mathbf{T}_1], \mathrm{x}_1) \cap \Phi([\mathbf{T}_1], \mathrm{x}_2)$, то існують елементи $t_1', t_2' \in \mathbf{T}_1$ такі, що:

$$\Phi(t_1', \mathrm{x}_1) = \Phi(t_2', \mathrm{x}_2) = \tau'. \tag{26}$$

Застосовуючи формули (22), (25), і (26), при $i \in \overline{1,2}$ отримуємо:

$$\mathscr{U}(t_i, \mathrm{x}_i) = (\Phi(t_i, \mathrm{x}_i), \mathbf{F}(\mathrm{x}_i, \Phi(t_i, \mathrm{x}_i))) = \\ = (\tau, \mathbf{F}(\mathrm{x}_i, \tau)); \tag{27}$$

$$\mathscr{U}(t_i', \mathrm{x}_i) = (\Phi(t_i', \mathrm{x}_i), \mathbf{F}(\mathrm{x}_i, \Phi(t_i', \mathrm{x}_i))) = \\ = (\tau', \mathbf{F}(\mathrm{x}_i, \tau')). \tag{28}$$

Оскільки ОПК $\mathscr{U}$ є т-одностайним, то, за означенням 3, з рівностей (27), (28) випливає рівність:

$$\mathbf{F}(\mathrm{x}_2, \tau) - \mathbf{F}(\mathrm{x}_1, \tau) = \mathbf{F}(\mathrm{x}_2, \tau') - \mathbf{F}(\mathrm{x}_1, \tau').$$

Звідси, використовуючи (23), отримуємо, $\mathbf{F}(\mathrm{x}_2, \tau) - \mathbf{F}(\mathrm{x}_1, \tau) = \mathbf{c}$.

Отже, в обох випадках виконується умова (24). Враховуючи довільність вибору векторів $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2 \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$ таких, що $\mathrm{x}_1 \neq \mathrm{x}_2$, бачимо, що функція $\mathbf{F}$ задовольняє умову 2) даної теореми.

2.б.2) Розглянемо довільні елементи $\tau \in \mathbf{T}_2$ і $\mathrm{y} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$. Оскільки $\mathscr{U} \in \mathbb{P}\mathbf{k}(\mathbb{T}_1, \mathfrak{Q}_1; \mathbb{T}_2, \mathfrak{Q}_2)$, то існують елементи $t \in \mathbf{T}_1$ і $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$ такі, що $\mathscr{U}(t, \mathrm{x}) = (\tau, \mathrm{y})$. Використовуючи формулу (22), маємо:

$$(\Phi(t, \mathrm{x}), \mathbf{F}(\mathrm{x}, \Phi(t, \mathrm{x}))) = (\tau, \mathrm{y}). \tag{29}$$

Звідси маємо $\Phi(t, \mathrm{x}) = \tau$, отже, $\tau \in \Phi([\mathbf{T}_1], \mathrm{x})$, крім того, згідно з формулою (29), маємо, $\mathbf{F}(\mathrm{x}, \tau) = \mathrm{y}$. Таким чином, для довільних $\tau \in \mathbf{T}_2$ і $\mathrm{y} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$ існує вектор $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$ такий, що $\tau \in \Phi([\mathbf{T}_1], \mathrm{x})$ і $\mathbf{F}(\mathrm{x}, \tau) = \mathrm{y}$. Тобто функція $\mathbf{F}$ задовольняє умову 3) даної теореми.

Отже, відображення $\mathscr{U}$ можна подати у вигляді (22), де функції Φ і $\mathbf{F}$ задовольняють умови $1), 2), 3)$ даної теореми. Що й треба було довести. □

4 Критерій трансляційної одностайної поступальності для систем відліку в універсальних кінематиках

В цьому розділі статті дотримуватимемось термінології та системи позначень теорії універсальних кінематик, прийнятої в роботах [8, 6, 5, 7, 10, 9, та ін.].

Використовуючи твердження 3 отримуємо наступний наслідок з теореми 1, який дає необхідну і достатню умову трансляційної одностайної поступальності для систем відліку в універсальних кінематиках.

Наслідок 1. *Нехай, $\mathcal{F}$ — векторна універсальна кінематика. Система відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ є т-одностайною відносно системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ тоді і тільки тоді, коли існують функції:*

$$\begin{aligned}
&\Phi : \mathbb{M}k(\mathfrak{m}) \to \mathbf{Tm}(\mathfrak{l}) \quad i \\
&\mathbf{F} : \mathcal{D} \to \mathbf{Zk}(\mathfrak{l}), \\
&\qquad \mathcal{D} = \bigcup_{\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{m})} \{\mathrm{x}\} \times \Phi([\mathbf{Tm}(\mathfrak{m})], \mathrm{x}) = \\
&\qquad\quad = \bigcup_{\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{m})} \{\mathrm{x}\} \times \{\Phi(t, \mathrm{x}) \mid t \in \mathbf{Tm}(\mathfrak{m})\},
\end{aligned}$$

що задовольняють такі умови:

1) *Для довільного елемента $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{m})$ функція $\Phi_{(\mathrm{x})}(t) = \Phi(t, \mathrm{x})$ $(t \in \mathbf{Tm}(\mathfrak{m}))$ є ін'єктивним відображенням з $\mathbf{Tm}(\mathfrak{m})$ в $\mathbf{Tm}(\mathfrak{l})$.*

2) *Для довільних $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2 \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{m})$ таких, що $\mathrm{x}_1 \neq \mathrm{x}_2$ існує вектор $\mathbf{c} = \mathbf{c}_{\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{l})$ такий, що $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ і $\mathbf{F}(\mathrm{x}_2, \tau) - \mathbf{F}(\mathrm{x}_1, \tau) = \mathbf{c}$ $(\forall \tau \in \Phi([\mathbf{Tm}(\mathfrak{m})], \mathrm{x}_1) \cap \Phi([\mathbf{Tm}(\mathfrak{m})], \mathrm{x}_2))$.*

3) *Для довільних $\tau \in \mathbf{Tm}(\mathfrak{l})$ і $\mathrm{y} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{l})$ існує елемент $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{m})$ такий, що $\tau \in \Phi([\mathbf{Tm}(\mathfrak{m})], \mathrm{x})$ і $\mathbf{F}(\mathrm{x}, \tau) = \mathrm{y}$.*

4) *Для довільного елемента $\mathrm{w} = (t, \mathrm{x}) \in \mathbb{M}k(\mathfrak{m})$ справедлива рівність:*

$$[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]\, \mathrm{w} = (\Phi(t, \mathrm{x}), \mathbf{F}(\mathrm{x}, \Phi(t, \mathrm{x}))).$$

Список літератури

[1] Биркгоф Г. Теория решеток. “Наука”, Москва, 1984.

[2] Грушка Я.І. *Мінливі множини та їх властивості*. Доповіді Національної академії наук України 2012, (5), 12–18.

[3] Грушка Я.І. *Критерій існування універсального перетворення координат у кінематичних мінливих множинах*. Буковинський математичний журнал 2014, **2** (2-3), 59–71.

[4] Грушка Я.І. *Мінливі множини та їх застосування для побудови кінематики тахіонів*. Збірник праць Інституту математики НАН України 2014, **11** (1), 192–227.

[5] Грушка Я.І. *Еволюційні розширення кінематичних множин та універсальних кінематик*. Збірник праць Інституту математики НАН України 2015, **12** (2), 139–204.

[6] Грушка Я.І. *Кінематичні мінливі множини із заданим універсальним перетворенням координат*. Збірник праць Інституту математики НАН України 2015, **12** (1), 74–118.

[7] Грушка Я.І. *Про часонезворотність універсальних кінематик*. Доповіді Національної академії наук України 2016, (7), 14–21. doi: 10.15407/dopovidi2016.07.014.

[8] Grushka Ya.I. Draft introduction to abstract kinematics. (Version 2.0). Preprint: ResearchGate, 2017. URL: https://doi.org/10.13140/RG.2.2.28964.27521. doi: 10.13140/RG.2.2.28964.27521.

[9] Грушка Я.І. *Критерій одностайної поступальності систем відліку в універсальних кінематиках*. Вісник Черкаського університету: Серія фізико-математичні науки 2017, (1), 122–137.

[10] Грушка Я.І. *Одностайно-поступальний рух систем відліку в універсальних кінематиках*. Буковинський математичний журнал 2017, **5** (3-4), 56–70.

References

[1] Birkhoff G. Lattice theory. "Nauka", Moscow, 1984. (in Russian) (See also: Birkhoff G. Lattice theory. Third edition. American Mathematical society colloquium publications, Vol. XXV, New York, 1967.)

[2] Grushka Ya.I. *Changeable sets and their properties*. Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine 2012, (5), 12–18. (in Ukrainian)

[3] Grushka Ya.I. *Existence criteria for universal coordinate transforms in kinematic changeable sets*. Bukovinian Mathematical Journal 2014, **2** (2-3), 59–71. (in Ukrainian)

[4] Grushka Ya.I. *Changeable sets and their applications to construction the tachyon kinematics*. Proceedings of Institute of Mathematics NAS of Ukraine 2014, **11** (1), 192–227. (in Ukrainian)

[5] Grushka Ya.I. *Evolutionary extensions of kinematic sets and universal kinematics*. Proceedings of Institute of Mathematics NAS of Ukraine 2015, **12** (2), 139–204. (in Ukrainian)

[6] Grushka Ya.I. *Kinematic changeable sets with given universal coordinate transforms*. Proceedings of Institute of Mathematics NAS of Ukraine 2015, **12** (1), 74–118. (in Ukrainian)

[7] Grushka Ya.I. *On time irreversibility of universal kinematics*. Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine 2016, (7), 14–21. doi: 10.15407/dopovidi2016.07.014 (in Ukrainian).

[8] Grushka Ya.I. Draft introduction to abstract kinematics. (Version 2.0). Preprint: ResearchGate, 2017. URL: https://doi.org/10.13140/RG.2.2.28964.27521. doi: 10.13140/RG.2.2.28964.27521.

[9] Grushka Ya.I. *The criterion for self-consistently translational motion of reference frames in universal kinematics*. Bulletin of Cherkasy national university: Physical and mathematical series 2017, (1), 122–137. (in Ukrainian)

[10] Grushka Ya.I. *Self-consistently translational motion of reference frames in universal kinematics*. Bukovinian Mathematical journal 2017, **5** (3-4), 56–70. (in Ukrainian)

Надійшло 17.11.2020

Grushka Ya.I. *The criterion for transferable self-consistently translationality of coordinate transform operators and reference frames in universal kinematics*, Bukovinian Math. Journal. **9**, 1 (2021), 128–139.

From an intuitive point of view universal kinematics are collections (sets) of changing objects, which evolve, being in a certain spatial-geometric environment, and evolution of which can be observed from many different frames of reference. Moreover, the definition of universal kinematics impose the existence of some (preassigned) universal coordinate transform between every two reference frames of such kinematics. Transferable self-consistently translational reference frames (in vector universal kinematics) are interesting because for such reference frames it is possible to give a clear and unambiguous definition of displacement of a moving reference frame relative to a fixed one, which does not depend on the choice of a fixed point in the moving frame of reference. In the present paper it is shown that an arbitrary reference frame $\mathfrak{m}$ is transferable self-consistently translational relatively to a reference frame $\mathfrak{l}$ (in some vector universal kinematics $\mathcal{F}$) if and only if the coordinate transform operator from the reference frame $\mathfrak{m}$ to the reference frame $\mathfrak{l}$ is transferable self-consistently translational. Therefore transferable self-consistently translational coordinate transform operators describe the conversion of coordinates from the moving and transferable self-consistently translational frame of reference to the (given) fixed frame in vector universal kinematics. Also in the paper it is described the structure of transferable self-consistently translational coordinate transform operators (this is the main result of the article). Using this result it have been obtained the necessary and sufficient condition for transferable self-consistently translationality of one reference frame relatively to another in vector universal kinematics.