

^{2,1}Бродяк О.Я., ¹Гузик Н.М.

КОЕФІЦІЄНТНІ ОБЕРНЕНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З ЗАГАЛЬНИМ СЛАБКИМ ВИРОДЖЕННЯМ

Досліджуються обернені задачі для параболічного рівняння з виродженням, молодший коефіцієнт якого є лінійним многочленом за просторовою змінною з двома невідомими залежними від часу функціями. Виродження рівняння спричинено монотонно зростаючою функцією від часу, яка розміщена в ньому при похідній за часом. Встановлено умови існування та єдиності класичних розв'язків згаданих задач у випадку слабого виродження.

Ключові слова і фрази: коефіцієнтна обернена задача, параболічне рівняння, загальне слабе виродження.

¹Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного, Львів, Україна

²Національний університет "Львівська політехніка", Львів, Україна
e-mail: hryntsiu@ukr.net, brodyakoksana1976@gmail.com

ВСТУП

Завдяки практичному застосуванню в геофізиці, економіці, медицині [11] в останні десятиліття активно розвивається теорія обернених задач. Що стосується коефіцієнтних обернених задач для параболічних рівнянь, то на сьогодні вони вивчені достатньо повно (див. [12, 14, 4, 3, 2, 5] та бібліографію у них).

При математичному моделюванні таких процесів як рух рідин та газів у пористому середовищі, явища у плазмі, опріснення морських вод, поведінка фінансових ринків тощо виникають задачі для рівнянь з виродженням. Коефіцієнтним оберненим задачам визначення залежних від часу коефіцієнтів у параболічних рівняннях присвячені роботи [15, 9, 10, 1, 7, 6]. Обернені задачі визначення коефіцієнтів у параболічному рівнянні, що залежали б від усіх просторових і часової змінної залишається проблемою відкритою.

У цій роботі розглядаються обернені задачі для параболічного рівняння з виродженням. Молодший коефіцієнт цього рівняння є лінійним поліномом за просторовою змінною з двома невідомими залежними від часу функціями. Для визначення цих функцій задаються додаткові умови, так звані умови перевизначення, у вигляді теплових

УДК 517.95

2010 *Mathematics Subject Classification:* 35R30, 35K65.

моментів. Задачі відрізняються набором крайових умов (Діріхле, Неймана). Виродження рівняння спричинено монотонно зростаючою функцією, що перетворюється в нуль в початковий момент часу і розміщена у рівнянні при похідній за часом. Досліджується випадок слабкого виродження. При цьому застосовується апарат функцій Гріна для отримання інтегральних рівнянь еквівалентних заданим крайовим задачам, теорема Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора та властивості розв'язків систем однорідних інтегральних рівнянь Вольтера з ядрами, що мають інтегровні особливості. У роботі отримано умови існування та єдиності класичних розв'язків згаданих задач.

1 ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ ТА ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

В області $Q_T = \{(x, t) : 0 < x < h, 0 < t < T\}$ розглядається обернена задача визначення залежних від часу функцій $b_1 = b_1(t)$, $b_2 = b_2(t)$ у коефіцієнті при похідній за просторовою змінною у параболічному рівнянні з виродженням

$$\psi(t)u_t = a(t)u_{xx} + (b_1(t)x + b_2(t))u_x + c(x, t)u + f(x, t) \quad (1)$$

з початковою умовою

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, h], \quad (2)$$

крайовими умовами

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(h, t) = \mu_2(t), \quad t \in [0, T] \quad (3)$$

та умовами перевизначення

$$\int_0^h u(x, t) dx = \mu_3(t), \quad t \in [0, T], \quad (4)$$

$$\int_0^h xu(x, t) dx = \mu_4(t), \quad t \in [0, T]. \quad (5)$$

Відомо, що $a(t) > 0, t \in [0, T]$, а виродження рівняння спричиняє монотонно зростаюча функція $\psi(t) > 0, t \in (0, T]$, $\psi(0) = 0$. Виродження рівняння називатимемо слабким, якщо $\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t \frac{d\tau}{\psi(\tau)} = 0$, та сильним, якщо ж $\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t \frac{d\tau}{\psi(\tau)} = +\infty$.

Означення 1. Трійка функцій $(b_1, b_2, u) \in (C[0, T_0])^2 \times C^{2,1}(Q_{T_0}) \cap C^{1,0}(\overline{Q_{T_0}})$, що задовольняє рівняння (1) та умови (2)-(5) поточково для всіх $t \leq T_0$ називається локальним розв'язком задачі (1)-(5) при $T_0 < T$ та глобальним розв'язком цієї задачі при $T_0 = T$.

У роботі встановлено умови існування розв'язку задачі (1)-(5) на основі теореми Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора. Доведення єдиності базується на використанні властивостей розв'язків однорідних інтегральних рівнянь Вольтера другого роду з ядрами, що мають інтегровні особливості. Дослідження проведено у випадку слабкого виродження.

2 ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ

Теорема 1. Нехай виконуються умови:

A1) $\varphi \in C^2[0, h]$, $\mu_i \in C^1[0, T]$, $i \in \overline{1, 4}$, $a \in C[0, T]$, $a(t) > 0$, $t \in [0, T]$, $c, f \in C(\overline{Q_T})$ та задовольняють умову Гельдера за змінною x рівномірно по t з показником α , $0 < \alpha < 1$;

A2) $(h\mu_2(t) - \mu_3(t))^2 - (\mu_2(t) - \mu_1(t))(h^2\mu_2(t) - 2\mu_4(t)) \neq 0$, $t \in [0, T]$;

A3) $\psi(t) > 0$, $t \in (0, T]$, $\psi(0) = 0$, $\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t \frac{d\tau}{\psi(\tau)} = 0$;

A4) $\mu_1(0) = \varphi(0)$, $\mu_2(0) = \varphi(h)$, $\int_0^h \varphi(x) dx = \mu_3(0)$, $\int_0^h x\varphi(x) dx = \mu_4(0)$.

Тоді існує локальний розв'язок задачі (1)-(5).

Доведення. Для початку зведемо задачу (1)-(5) до еквівалентної системи рівнянь, використовуючи апарат функцій Гріна.

У задачі (1)-(3) проведемо заміну змінних

$$u(x, t) = \tilde{u}(x, t) + u_0(x, t), \quad (6)$$

де функція $u_0(x, t)$ задовольняє задані умови (2), (3). Безпосередньою перевіркою, враховуючи умови узгодження (A4), легко показати, що

$$u_0(x, t) = \varphi(x) - \varphi(0) + \mu_1(t) + \frac{x}{h} \left(\mu_2(t) - \mu_1(t) - \mu_2(0) + \mu_1(0) \right). \quad (7)$$

У результаті заміни (6) відносно функції $\tilde{u} = \tilde{u}(x, t)$ отримаємо неоднорідне рівняння з однорідними початковою та крайовими умовами:

$$\begin{aligned} \psi(t)\tilde{u}_t &= a(t)\tilde{u}_{xx} + (b_1(t)x + b_2(t))\tilde{u}_x + c(x, t)\tilde{u} + f(x, t) - \psi(t)\mu_1'(t) - \frac{x\psi(t)}{h}(\mu_2'(t) - \mu_1'(t)) \\ &+ a(t)\varphi''(x) + (b_1(t)x + b_2(t)) \left(\varphi'(x) + \frac{1}{h}(\mu_2(t) - \mu_1(t) - \mu_2(0) + \mu_1(0)) \right) \\ &+ c(x, t) \left(\varphi(x) - \varphi(0) + \mu_1(t) + \frac{x}{h}(\mu_2(t) - \mu_1(t) - \mu_2(0) + \mu_1(0)) \right), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\tilde{u}(x, 0) = 0, \quad x \in [0, h], \quad (9)$$

$$\tilde{u}(0, t) = \tilde{u}(h, t) = 0, \quad t \in [0, T]. \quad (10)$$

Використовуючи функцію Гріна $G_1 = G_1(x, t, \xi, \tau)$ першої крайової задачі для рівняння теплопровідності

$$\psi(t)u_t = a(t)u_{xx} \quad (11)$$

задачу (8)-(10) замінимо на еквівалентне інтегро-диференціальне рівняння

$$\tilde{u}(x, t) = \int_0^t \int_0^h G_1(x, t, \xi, \tau) \left((b_1(\tau)\xi + b_2(\tau))\tilde{u}_\xi(\xi, \tau) + c(\xi, \tau)\tilde{u}(\xi, \tau) + f(\xi, \tau) \right)$$

$$\begin{aligned}
& -\psi(\tau)\mu'_1(\tau) + a(\tau)\varphi''(\xi) - \frac{\psi(\tau)\xi}{h}(\mu'_2(\tau) - \mu'_1(\tau)) + (b_1(\tau)\xi + b_2(\tau)) \\
& \times \left(\varphi'(\xi) + \frac{1}{h}(\mu_2(\tau) - \mu_1(\tau) - \mu_2(0) + \mu_1(0)) \right) + c(\xi, \tau)(\varphi(\xi) - \varphi(0) + \mu_1(\tau) \\
& + \frac{\xi}{h}(\mu_2(\tau) - \mu_1(\tau) - \mu_2(0) + \mu_1(0))) \Big) d\xi d\tau. \tag{12}
\end{aligned}$$

Відомо [8], що функції Гріна першої ($k = 1$) чи другої ($k = 2$) крайових задач для рівняння (11) можна подати у явному вигляді

$$\begin{aligned}
G_k(x, t, \xi, \tau) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta(t) - \theta(\tau))}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\exp\left(-\frac{(x - \xi + 2nh)^2}{4(\theta(t) - \theta(\tau))}\right) \right. \\
& \left. + (-1)^k \exp\left(-\frac{(x + \xi + 2nh)^2}{4(\theta(t) - \theta(\tau))}\right) \right), \quad k = 1, 2, \tag{13}
\end{aligned}$$

де $\theta(t) = \int_0^t \frac{a(\tau)}{\psi(\tau)} d\tau$. Враховуючи (13), легко показати, що ці функції володіють властивостями

$$\int_0^h |G_k(x, t, \xi, \tau)| d\xi d\tau \leq 1, \quad \int_0^h |G_{kx}(x, t, \xi, \tau)| d\xi \leq \frac{C_1}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}}, \quad k = 1, 2, \tag{14}$$

де C_1 – додатна стала.

Покладемо $v(x, t) \equiv u_x(x, t)$. Використовуючи (6), (12), пряму задачу (1)-(3) зведемо до системи інтегральних рівнянь відносно невідомих $u = u(x, t)$, $v = v(x, t)$:

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \int_0^t \int_0^h G_1(x, t, \xi, \tau) \left((b_1(\tau)\xi + b_2(\tau))v(\xi, \tau) + c(\xi, \tau)u(\xi, \tau) - \psi(t)\mu'_1(\tau) \right. \\
& \left. - \frac{\xi\psi(t)}{h}(\mu'_2(\tau) - \mu'_1(\tau)) + a(\tau)\varphi''(\xi) + f(\xi, \tau) \right) d\xi d\tau + u_0(x, t), \quad (x, t) \in \overline{Q}_T, \tag{15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v(x, t) &= \int_0^t \int_0^h G_{1x}(x, t, \xi, \tau) \left((b_1(\tau)\xi + b_2(\tau))v(\xi, \tau) + c(\xi, \tau)u(\xi, \tau) - \psi(t)\mu'_1(\tau) \right. \\
& \left. - \frac{\xi\psi(t)}{h}(\mu'_2(\tau) - \mu'_1(\tau)) + a(\tau)\varphi''(\xi) + f(\xi, \tau) \right) d\xi d\tau + u_{0x}(x, t), \quad (x, t) \in \overline{Q}_T. \tag{16}
\end{aligned}$$

Зауважимо, що рівняння (16) отримане з рівняння (15) шляхом диференціювання за просторовою змінною.

Знайдемо рівняння для функцій $b_1 = b_1(t)$, $b_2 = b_2(t)$. Для цього домножимо (1) на x^k , $k = 0, 1$ та проінтегруємо його за змінною x від 0 до h :

$$b_1(t) = \Delta^{-1} \left(\left(\psi(t)\mu'_3(t) - a(t)(v(h, t) - v(0, t)) - \int_0^h (c(x, t)u(x, t) + f(x, t)) dx \right) \right)$$

$$\begin{aligned} & \times (h\mu_2(t) - \mu_3(t)) - \left(\psi(t)\mu_4'(t) - a(t)(hv(h,t) - \mu_2(t) + \mu_1(t)) \right. \\ & \left. - \int_0^h x(c(x,t)u(x,t) + f(x,t))dx \right) (\mu_2(t) - \mu_1(t)), \quad t \in [0, T], \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} b_2(t) = \Delta^{-1} & \left(\left(\psi(t)\mu_4'(t) - a(t)(hv(h,t) - \mu_2(t) + \mu_1(t)) - \int_0^h x(c(x,t)u(x,t) \right. \right. \\ & \left. \left. + f(x,t))dx \right) (h\mu_2(t) - \mu_3(t)) - \left(\psi(t)\mu_3'(t) - a(t)(v(h,t) - v(0,t)) \right. \right. \\ & \left. \left. - \int_0^h (c(x,t)u(x,t) + f(x,t))dx \right) (h^2\mu_2(t) - 2\mu_4(t)) \right), \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (18)$$

Вираз

$$\Delta = (h\mu_2(t) - \mu_3(t))^2 - (\mu_2(t) - \mu_1(t))(h^2\mu_2(t) - 2\mu_4(t)) \quad (19)$$

відмінний від нуля згідно з умовою (A2) Теорема 1.

Отже, задачу (1)-(5) зведено до системи рівнянь (15)-(18). Під розв'язком цієї системи будемо розуміти набір функцій (b_1, b_2, u, v) , таких що $(b_1, b_2, u, v) \in (C[0, T])^2 \times (C(\overline{Q_T}))^2$ та при підстановці їх у рівняння (15)-(18) всі рівності перетворюються у тотожності.

Задача (1)-(5) та система рівнянь (15)-(18) є еквівалентними у такому розумінні: якщо трійка функцій (b_1, b_2, u) є глобальним розв'язком задачі (1)-(5), то (b_1, b_2, u, v) є розв'язком системи рівнянь (15)-(18), і, навпаки. Перша частина твердження випливає зі способу отримання системи рівнянь. Покажемо, що, якщо $(b_1, b_2, u, v) \in (C[0, T])^2 \times (C(\overline{Q_T}))^2$ є розв'язком системи рівнянь (15)-(18), то (b_1, b_2, u) належить до класу $(C[0, T])^2 \times C^{2,1}(Q_T) \cap C^{1,0}(\overline{Q_T})$ і задовольняє умови (1)-(5).

Продиференціюємо рівність (15) за змінною x . Використовуючи властивості інтегральних рівнянь Вольтера другого роду, отримуємо, що $v(x, t) \equiv u_x(x, t)$, $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C^{1,0}(\overline{Q_T})$ і задовольняє (1)-(3).

Домножимо рівність (17) на $h\mu_2(t) - \mu_3(t)$, а (18) на $\mu_2(t) - \mu_1(t)$. Сумуючи отримані рівності, знаходимо

$$\begin{aligned} b_1(t)(h\mu_2(t) - \mu_3(t)) + b_2(t)(\mu_2(t) - \mu_1(t)) &= \psi(t)\mu_3'(t) - a(t)(u_x(h, t) - u_x(0, t)) \\ &- \int_0^h (c(x, t)u(x, t) + f(x, t))dx. \end{aligned}$$

Використовуючи (1)-(3), останню рівність подамо у вигляді

$$b_1(t) \left(\int_0^h u(x, t)dx - \mu_3(t) \right) = -\psi(t) \left(\int_0^h u_t(x, t)dx - \mu_3'(t) \right).$$

Покладемо $z(t) \equiv \int_0^h u(x,t)dx - \mu_3(t)$. Тоді $b_1(t)z(t) = -\psi(t)z'(t)$, звідки $z(t) = z(0)e^{-\int_0^t \frac{b_1(\tau)}{\psi(\tau)}d\tau}$. Оскільки $z(0) = 0$ за умовою (A4) Теорема 1, то $z(t) \equiv 0$, тобто має місце рівність (4).

Аналогічно, домножимо рівняння (17) на $h^2\mu_2(t) - 2\mu_4(t)$, а (18) – на $h\mu_2(t) - \mu_3(t)$. Просумувавши, знаходимо

$$b_1(t)(h^2\mu_2(t) - 2\mu_4(t)) + b_2(t)(h\mu_2(t) - \mu_3(t)) = -\psi(t)\mu_4'(t) - a(t)(hu_x(h,t) - \mu_2(t) + \mu_1(t)) - \int_0^h x(c(x,t)u(x,t) + f(x,t))dx.$$

Застосовуючи умови узгодження (A4) Теорема 1, приходимо до умови (5). Це й завершує доведення еквівалентності оберненої задачі (1)-(5) та системи рівнянь (15)-(18).

Оскільки досліджується задача для рівняння з виродженням, то встановимо поведінку інтегралів, що входять до правих частин формул (15), (16) при $t \rightarrow 0$. Беручи до уваги оцінки функцій Гріна (14), отримаємо

$$\begin{aligned} I_1 &\equiv \left| \int_0^t \int_0^h G_1(x,t,\xi,\tau) \left((b_1(\tau)\xi + b_2(\tau))v(\xi,\tau) + c(\xi,\tau)u(\xi,\tau) - \psi(t)\mu_1'(\tau) - \frac{\xi\psi(t)}{h}(\mu_2'(\tau) - \mu_1'(\tau)) + a(\tau)\varphi''(\xi) + f(\xi,\tau) \right) d\xi d\tau \right| \leq C_2 t, \\ I_2 &\equiv \left| \int_0^t \int_0^h G_{1x}(x,t,\xi,\tau) \left((b_1(\tau)\xi + b_2(\tau))v(\xi,\tau) + c(\xi,\tau)u(\xi,\tau) - \psi(t)\mu_1'(\tau) - \frac{\xi\psi(t)}{h}(\mu_2'(\tau) - \mu_1'(\tau)) + a(\tau)\varphi''(\xi) + f(\xi,\tau) \right) d\xi d\tau \right| \leq C_3 \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} \\ &= C_3 \int_0^t \frac{\frac{\psi(\tau)}{a(\tau)}d\theta(\tau)}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} \leq C_4\psi(t) \int_0^t \frac{d\theta(\tau)}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} \leq C_5\psi(t)\sqrt{\theta(t)} \leq C_6\psi(t) \left(\int_0^t \frac{d\sigma}{\psi(\sigma)} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Враховуючи означення слабкого виродження, можемо стверджувати, що для довільного розв'язку системи рівнянь (15)-(18) інтеграли з правих частин формул (15), (16) прямують до нуля при $t \rightarrow 0$.

Подамо систему рівнянь (15)-(18) у вигляді операторного рівняння

$$\omega = P\omega, \tag{20}$$

де $\omega = (u, v, b_1, b_2)$ і оператор $P = (P_1, P_2, P_3, P_4)$ визначається відповідно правими частинами вказаних рівнянь.

Нехай $|u(x,t)| \leq M_1, |v(x,t)| \leq M_2, (x,t) \in \bar{Q}_T$, де M_1, M_2 поки що довільні, достатньо великі сталі. Застосовуючи ці оцінки в (17), (18), знаходимо

$$|P_3\omega| \leq \frac{C_7(1 + M_1 + M_2)}{\min_{t \in [0,T]} |\Delta|} \equiv M_3, \quad t \in [0, T], \tag{21}$$

$$|P_4\omega| \leq \frac{C_8(1 + M_1 + M_2)}{\min_{t \in [0, T]} |\Delta|} \equiv M_4, \quad t \in [0, T], \quad (22)$$

де сталі C_7, C_8 залежать лише від вхідних даних цієї задачі.

Розглянемо рівняння (15), (16). Враховуючи наведені оцінки, одержимо

$$\begin{aligned} |P_1\omega| &\leq \left| \int_0^t \int_0^h G_1(x, t, \xi, \tau) \left((M_3\xi + M_4)M_2 + c(\xi, \tau)M_1 - \psi(t)\mu'_1(\tau) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\xi\psi(t)}{h}(\mu'_2(\tau) - \mu'_1(\tau)) + a(\tau)\varphi''(\xi) + f(\xi, \tau) \right) d\xi d\tau \right| + \max_{(x,t) \in \overline{Q}_T} |u_0(x, t)| \\ &\leq C_9t + \max_{(x,t) \in \overline{Q}_T} |u_0(x, t)|, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} |P_2\omega| &\leq \left| \int_0^t \int_0^h G_{1x}(x, t, \xi, \tau) \left((M_3\xi + M_4)M_2 + c(\xi, \tau)M_1 - \psi(t)\mu'_1(\tau) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\xi\psi(t)}{h}(\mu'_2(\tau) - \mu'_1(\tau)) + a(\tau)\varphi''(\xi) + f(\xi, \tau) \right) d\xi d\tau \right| + \max_{(x,t) \in \overline{Q}_T} |u_{0x}(x, t)| \\ &\leq C_{10}\psi(t) \left(\int_0^t \frac{d\sigma}{\psi(\sigma)} \right)^{\frac{1}{2}} + \max_{(x,t) \in \overline{Q}_T} |u_{0x}(x, t)|. \end{aligned} \quad (24)$$

Виберемо числа M_1, M_2 так, щоб $M_1 > \max_{(x,t) \in \overline{Q}_T} |u_0(x, t)|$, $M_2 > \max_{(x,t) \in \overline{Q}_T} |u_{0x}(x, t)|$. Крім того, зафіксуємо число $T_0 : 0 < T_0 \leq T$ таке, що

$$C_9T_0 + \max_{(x,t) \in \overline{Q}_T} |u_0(x, t)| \leq M_1, \quad C_{10}\psi(T_0) \left(\int_0^{T_0} \frac{d\sigma}{\psi(\sigma)} \right)^{\frac{1}{2}} + \max_{(x,t) \in \overline{Q}_T} |u_{0x}(x, t)| \leq M_2. \quad (25)$$

На замкненій, опуклій множині $\mathcal{N} \equiv \{(u, v, b_1, b_2) \in (C(\overline{Q}_{T_0}))^2 \times (C[0, T_0])^2 : |u(x, t)| \leq M_1, |v(x, t)| \leq M_2, |b_1(t)| \leq M_3, |b_2(t)| \leq M_4\}$ з Банахового простору $\mathcal{B} \equiv (C(\overline{Q}_{T_0}))^2 \times (C[0, T_0])^2$ розглянемо операторне рівняння (20). З оцінок (21)-(24) випливає, що оператор P переводить цю множину в себе ж. Те, що цей оператор цілком неперервний доводиться за тою ж схемою, що і в [1] з врахуванням умов (A1) Теорема 1. Застосовуючи теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора, отримаємо існування розв'язку системи рівнянь (15)-(18), а, отже, і локального розв'язку оберненої задачі (1)-(5). Теорему 1 доведено. \square

3 ЄДИНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ

Теорема 2. При виконанні умови (A2) Теорема 1 глобальний розв'язок задачі (1)-(5) єдиний.

Доведення. Припустимо, що задача (1)-(5) має два розв'язки $(b_{1i}, b_{2i}, u_i), i = 1, 2$. Позначимо їх різниці відповідно $b_1(t) = b_{11}(t) - b_{12}(t), b_2(t) = b_{21}(t) - b_{22}(t)$,

$u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$. Використовуючи (1)-(5), для них одержимо рівняння

$$\psi(t)u_t = a(t)u_{xx} + (b_{11}(t)x + b_{21}(t))u_x + c(x, t)u + (b_1(t)x + b_2(t))u_{2x} \quad (26)$$

з однорідними початковою, крайовими умовами та умовами перевизначення:

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in [0, h], \quad (27)$$

$$u(0, t) = u(h, t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (28)$$

$$\int_0^h u(x, t)dx = 0, \quad t \in [0, T]. \quad (29)$$

$$\int_0^h xu(x, t)dx = 0, \quad t \in [0, T]. \quad (30)$$

За допомогою функції Гріна $G^*(x, t, \xi, \tau)$ першої крайової задачі для рівняння

$$\psi(t)u_t = a(t)u_{xx} + (b_{11}(t)x + b_{21}(t))u_x + c(x, t)u \quad (31)$$

розв'язок задачі (26)-(28) подамо у вигляді

$$u(x, t) = \int_0^t \int_0^h G^*(x, t, \xi, \tau)(b_1(\tau)\xi + b_2(\tau))u_{2\xi}(\xi, \tau)d\xi d\tau, \quad (x, t) \in \overline{Q}_T. \quad (32)$$

Продиференціюємо (32) за змінною x . Знайдемо

$$u_x(x, t) = \int_0^t \int_0^h G_x^*(x, t, \xi, \tau)(b_1(\tau)\xi + b_2(\tau))u_{2\xi}(\xi, \tau)d\xi d\tau, \quad (x, t) \in \overline{Q}_T. \quad (33)$$

Домножимо рівняння (26) на x^k , $k = 0, 1$ та проінтегруємо за змінною x від 0 до h . Отримаємо

$$b_1(t) = \Delta^{-1} \left(\left(a(t)hu_x(h, t) + \int_0^h xc(x, t)u(x, t)dx \right) (\mu_2(t) - \mu_1(t)) - \left(a(t)(u_x(h, t) - u_x(0, t)) + \int_0^h c(x, t)u(x, t)dx \right) (h\mu_2(t) - \mu_3(t)) \right), \quad (34)$$

$$b_2(t) = \Delta^{-1} \left(\left(a(t)hu_x(h, t) + \int_0^h xc(x, t)u(x, t)dx \right) (h\mu_2(t) - \mu_3(t)) - \left(a(t)(u_x(h, t) - u_x(0, t)) + \int_0^h c(x, t)u(x, t)dx \right) (h^2\mu_2(t) - 2\mu_4(t)) \right), \quad (35)$$

де Δ визначається формулою (19).

Підставляючи (32), (33) в (34), (35), отримаємо систему однорідних інтегральних рівнянь Вольтера другого роду відносно невідомих $b_1 = b_1(t)$, $b_2 = b_2(t)$:

$$b_1(t) = \int_0^t (K_{11}(t, \tau)b_1(\tau) + K_{12}(t, \tau)b_2(\tau))d\tau, \quad (36)$$

$$b_2(t) = \int_0^t (K_{21}(t, \tau)b_1(\tau) + K_{22}(t, \tau)b_2(\tau))d\tau, \quad (37)$$

де

$$\begin{aligned} K_{11}(t, \tau) = & \Delta^{-1} \left((\mu_2(t) - \mu_1(t)) \left(a(t)h \int_0^h G_x^*(h, t, \xi, \tau) \xi u_{2\xi}(\xi, \tau) d\xi \right. \right. \\ & + \left. \int_0^h \int_0^h G^*(x, t, \xi, \tau) x \xi c(x, t) u_{2\xi}(\xi, \tau) d\xi dx \right) - (h^2 \mu_2(t) - 2\mu_4(t)) \\ & \times \left(a(t) \int_0^h (G_x^*(h, t, \xi, \tau) - G_x^*(0, t, \xi, \tau)) \xi u_{2\xi}(\xi, \tau) d\xi \right. \\ & \left. + \int_0^h \int_0^h G^*(x, t, \xi, \tau) \xi c(x, t) u_{2\xi}(\xi, \tau) d\xi dx \right) \Big), \\ K_{12}(t, \tau) = & \Delta^{-1} \left((\mu_2(t) - \mu_1(t)) \left(a(t)h \int_0^h G_x^*(h, t, \xi, \tau) u_{2\xi}(\xi, \tau) d\xi \right. \right. \\ & + \left. \int_0^h \int_0^h G^*(x, t, \xi, \tau) x c(x, t) u_{2\xi}(\xi, \tau) d\xi dx \right) - (h^2 \mu_2(t) - 2\mu_4(t)) \\ & \times \left(a(t) \int_0^h (G_x^*(h, t, \xi, \tau) - G_x^*(0, t, \xi, \tau)) u_{2\xi}(\xi, \tau) d\xi \right. \\ & \left. + \int_0^h \int_0^h G^*(x, t, \xi, \tau) c(x, t) u_{2\xi}(\xi, \tau) d\xi dx \right) \Big), \\ K_{21}(t, \tau) = & \Delta^{-1} \left((h\mu_2(t) - \mu_3(t)) \left(a(t)h \int_0^h G_x^*(h, t, \xi, \tau) \xi u_{2\xi}(\xi, \tau) d\xi \right. \right. \\ & + \left. \int_0^h \int_0^h G^*(x, t, \xi, \tau) x \xi c(x, t) u_{2\xi}(\xi, \tau) d\xi dx \right) - (h^2 \mu_2(t) - 2\mu_4(t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(a(t) \int_0^h (G_x^*(h, t, \xi, \tau) - G_x^*(0, t, \xi, \tau)) \xi u_{2\xi}(\xi, \tau) d\xi \right. \\
& \left. + \int_0^h \int_0^h G^*(x, t, \xi, \tau) \xi c(x, t) u_{2\xi}(\xi, \tau) d\xi dx \right), \\
K_{22}(t, \tau) = & \Delta^{-1} \left((h\mu_2(t) - \mu_3(t)) \left(a(t) h \int_0^h G_x^*(h, t, \xi, \tau) u_{2\xi}(\xi, \tau) d\xi \right. \right. \\
& \left. \left. + \int_0^h \int_0^h G^*(x, t, \xi, \tau) x c(x, t) u_{2\xi}(\xi, \tau) d\xi dx \right) - (h^2\mu_2(t) - 2\mu_4(t)) \right. \\
& \times \left(a(t) \int_0^h (G_x^*(h, t, \xi, \tau) - G_x^*(0, t, \xi, \tau)) u_{2\xi}(\xi, \tau) d\xi \right. \\
& \left. \left. + \int_0^h \int_0^h G^*(x, t, \xi, \tau) c(x, t) u_{2\xi}(\xi, \tau) d\xi dx \right) \right).
\end{aligned}$$

Застосовуючи відомі оцінки функцій Гріна [13, р. 469]

$$|D_t^r D_y^s G^*(y, t, \eta, \tau)| \leq C_9 (\theta_0(t) - \theta_0(\tau))^{-\frac{1+2r+s}{2}} \exp\left(-C_{10} \frac{(y-\eta)^2}{\theta_0(t) - \theta_0(\tau)}\right), \quad (38)$$

$$\theta_0(t) = \int_0^t \frac{d\tau}{\psi(\tau)}, \quad r \in \{0, 1\}, \quad s \in \{0, 1, 2\}, \quad 2r + s = 1 \text{ або } 2r + s = 2, \quad \tau < t$$

та означення слабкого виродження можемо стверджувати, що ядра $K_{11}(t, \tau)$, $K_{12}(t, \tau)$, $K_{21}(t, \tau)$, $K_{22}(t, \tau)$ мають інтегровні особливості. Це означає, що система (34), (35) має лише тривіальний розв'язок

$$b_1(t) \equiv 0, \quad b_2(t) \equiv 0, \quad t \in [0, T].$$

Використовуючи це в задачі (26)-(30), знаходимо

$$u(x, t) \equiv 0, \quad (x, t) \in \bar{Q}_T.$$

Теорему 2 доведено. □

4 ВИПАДОК КРАЙОВИХ УМОВ НЕЙМАНА

Дослідимо тепер обернену задачу визначення залежних від часу функцій $b_1 = b_1(t)$, $b_2 = b_2(t)$ у рівнянні (1) з умовами (2), (4), (5) та крайовими умовами Неймана

$$u_x(0, t) = \mu_5(t), \quad u_x(h, t) = \mu_6(t), \quad t \in [0, T]. \quad (39)$$

Означення 2. Трійка функцій $(b_1, b_2, u) \in (C[0, T_0])^2 \times C^{2,1}(\overline{Q}_{T_0})$, що задовольняє рівняння (1) та умови (2), (39), (4), (5) поточково для всіх $t \leq T_0$, називається локальним розв'язком задачі (1), (2), (39), (4), (5), якщо $T_0 < T$ та глобальним розв'язком цієї задачі, якщо ж $T_0 = T$.

Теорема 3. Нехай виконуються умови:

B1) $\varphi \in C^2[0, h]$, $\mu_i \in C[0, T]$, $i = 5, 6$, $\mu_i \in C^1[0, T]$, $i = 3, 4$, $c, f \in C(\overline{Q}_T)$ та задовольняють умову Гельдера за змінною x рівномірно по t ;

B2) $\varphi'(x) > 0$, $x \in [0, h]$;

B3) $\psi(t) > 0$, $t \in (0, T]$, $\psi(0) = 0$, $\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t \frac{d\tau}{\psi(\tau)} = 0$;

B4) $\varphi'(0) = \mu_5(0)$, $\varphi'(h) = \mu_6(0)$, $\int_0^h \varphi(x) dx = \mu_3(0)$, $\int_0^h x\varphi(x) dx = \mu_4(0)$.

Тоді існує єдиний локальний розв'язок задачі (1), (2), (39), (4), (5).

Доведення. У цьому випадку, використовуючи функцію Гріна $G_2(x, t, \xi, \tau)$ другої крайової задачі для рівняння (11), задачу (1), (2), (39), зведемо до системи рівнянь

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \varphi(x) + x(\mu_5(t) - \mu_5(0)) + \frac{x^2}{2h} \left(\mu_6(t) - \mu_5(t) - \mu_6(0) + \mu_5(0) \right) \\ & + \int_0^t \int_0^h G_2(x, t, \xi, \tau) \left((b_1(\tau)\xi + b_2(\tau))v(\xi, \tau) + c(\xi, \tau)u(\xi, \tau) + f(\xi, \tau) - \psi(\tau) \left(\xi\mu_5'(\tau) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\xi^2}{2h}(\mu_6'(\tau) - \mu_5'(\tau)) \right) + a(\tau) \left(\varphi''(\xi) + \frac{1}{h}(\mu_6(\tau) - \mu_5(\tau) - \mu_6(0) + \mu_5(0)) \right) \right) d\xi d\tau, \quad (40) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(x, t) = & \varphi'(x) + \mu_5(t) - \mu_5(0) + \frac{x}{h} \left(\mu_6(t) - \mu_5(t) - \mu_6(0) + \mu_5(0) \right) \\ & + \int_0^t \int_0^h G_{2x}(x, t, \xi, \tau) \left((b_1(\tau)\xi + b_2(\tau))v(\xi, \tau) + c(\xi, \tau)u(\xi, \tau) + f(\xi, \tau) - \psi(\tau) \left(\xi\mu_5'(\tau) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\xi^2}{2h}(\mu_6'(\tau) - \mu_5'(\tau)) \right) + a(\tau) \left(\varphi''(\xi) + \frac{1}{h}(\mu_6(\tau) - \mu_5(\tau) - \mu_6(0) + \mu_5(0)) \right) \right) d\xi d\tau. \quad (41) \end{aligned}$$

Використовуючи (14), легко показати, що інтеграли з правих частин формул (40), (41) мають таку ж поведінку при $t \rightarrow 0$ як I_1, I_2 . Будемо вважати, що

$$|u(x, t)| \leq M_5, \quad (x, t) \in \overline{Q}_T, \quad (42)$$

$$0 < M_6 \leq v(x, t) \leq M_7, \quad (x, t) \in \overline{Q}_T, \quad (43)$$

сталі M_5, M_6, M_7 визначимо нижче.

Як і у випадку крайових умов Діріхле, використовуючи (1), (2), (39), (4), (5), знаходимо

$$b_1(t) = \left(\left(\mu_3'(t)\psi(t) - a(t)(\mu_6(t) - \mu_5(t)) - \int_0^h (c(x, t)u(x, t) + f(x, t)) dx \right) \right)$$

$$\begin{aligned} & \times (hu(h, t) - \mu_3(t)) - \left(\mu'_4(t)\psi(t) - a(t)(h\mu_6(t) - u(h, t) + u(0, t)) \right. \\ & \left. - \int_0^h x(c(x, t)u(x, t) + f(x, t))dx \right) (u(h, t) - u(0, t)) \Delta_1^{-1}, \quad (x, t) \in [0, h] \times [0, t_2], \quad (44) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_2(t) = & \left(\left(\mu'_4(t)\psi(t) - a(t)(h\mu_6(t) - u(h, t) + u(0, t)) - \int_0^h x(c(x, t)u(x, t) \right. \right. \\ & \left. \left. + f(x, t))dx \right) (hu(h, t) - \mu_3(t)) - \left(\mu'_3(t)\psi(t) - a(t)(\mu_6(t) - \mu_5(t)) \right. \right. \\ & \left. \left. - \int_0^h (c(x, t)u(x, t) + f(x, t))dx \right) (h^2u(h, t) - 2\mu_4(t)) \right) \Delta_1^{-1}, \quad (x, t) \in [0, h] \times [0, t_2], \quad (45) \end{aligned}$$

де

$$\Delta_1 = (hu(h, t) - \mu_3(t))^2 - (u(h, t) - u(0, t))(h^2u(h, t) - 2\mu_4(t)). \quad (46)$$

Вираз (46) подамо у вигляді

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \left(\int_0^h xv(x, t)dx \right)^2 - \int_0^h v(x, t)dx \int_0^h x^2v(x, t)dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^h \int_0^h (y_2 - y_1)^2 v(y_1, t)v(y_2, t)dy_1dy_2. \end{aligned}$$

Тоді його відмінність від нуля забезпечується умовою (43).

Як у випадку крайових умов Діріхле, подамо систему рівнянь (40)-(45) у вигляді операторного рівняння

$$\omega = P\omega,$$

де $\omega = (u, v, b_1, b_2)$ і оператор $P = (P_1, P_2, P_3, P_4)$ визначається відповідно правими частинами рівнянь цієї системи.

З рівностей (44), (45), використовуючи (42), (43), одержуємо

$$|P_3\omega| < \frac{C_{11}(1 + M_5 + M_7)}{\min_{t \in [0, t_2]} \Delta_1} \equiv M_8, \quad t \in [0, t_2], \quad (47)$$

$$|P_4\omega| < \frac{C_{12}(1 + M_5 + M_7)}{\min_{t \in [0, t_2]} \Delta_1} \equiv M_9, \quad t \in [0, t_2], \quad (48)$$

де сталі C_{11}, C_{12} залежать лише від вхідних даних задачі.

Зафіксуємо таке число $T_0, 0 < T_0 \leq T$, щоб виконувалися нерівності:

$$\left| x(\mu_5(t) - \mu_5(0)) + \frac{x^2}{2h} \left(\mu_6(t) - \mu_5(t) - \mu_6(0) + \mu_5(0) \right) + \int_0^t \int_0^h G_2(x, t, \xi, \tau) \right.$$

$$\begin{aligned} & \times \left((M_8\xi + M_9(\tau))M_7 + c(\xi, \tau)M_6 + f(\xi, \tau) - \psi(\tau) \left(\xi\mu'_5(\tau) + \frac{\xi^2}{2h}(\mu'_6(\tau) - \mu'_5(\tau)) \right) \right. \\ & \left. + a(\tau) \left(\varphi''(\xi) + \frac{1}{h}(\mu_6(\tau) - \mu_5(\tau) - \mu_6(0) + \mu_5(0)) \right) \right) d\xi d\tau \Big| \leq \frac{\min_{x \in [0, h]} |\varphi(x)|}{2}, \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} & \left| \mu_5(t) - \mu_5(0) + \frac{x}{h} \left(\mu_6(t) - \mu_5(t) - \mu_6(0) + \mu_5(0) \right) + \int_0^t \int_0^h G_{2x}(x, t, \xi, \tau) \right. \\ & \times \left((M_8\xi + M_9(\tau))M_7 + c(\xi, \tau)M_6 + f(\xi, \tau) - \psi(\tau) \left(\xi\mu'_5(\tau) + \frac{\xi^2}{2h}(\mu'_6(\tau) - \mu'_5(\tau)) \right) \right. \\ & \left. \left. + a(\tau) \left(\varphi''(\xi) + \frac{1}{h}(\mu_6(\tau) - \mu_5(\tau) - \mu_6(0) + \mu_5(0)) \right) \right) d\xi d\tau \right| \leq \frac{\min_{x \in [0, h]} \varphi'(x)}{2}. \end{aligned} \quad (50)$$

Тоді на замкненій, опуклій множині $\mathcal{N} \equiv \{(u, v, b_1, b_2) \in (C(\overline{Q}_{T_0}))^2 \times (C[0, T_0])^2 : |u(x, t)| \leq M_5, 0 < M_6 \leq v(x, t) \leq M_7, |b_1(t)| \leq M_8, |b_2(t)| \leq M_9\}$, де $M_5 \equiv \max_{x \in [0, h]} |\varphi(x)| + \frac{\min_{x \in [0, h]} |\varphi(x)|}{2}$, $M_6 \equiv \frac{\min_{x \in [0, h]} \varphi'(x)}{2}$, $M_7 \equiv \max_{x \in [0, h]} \varphi'(x) + \frac{\min_{x \in [0, h]} \varphi'(x)}{2}$ з Банахового простору $\mathcal{B} \equiv (C(\overline{Q}_{T_0}))^2 \times (C[0, T_0])^2$ виконуються всі умови теореми Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора. Доведення існування розв'язку задачі (1), (2), (39), (4), (5) завершуємо, як у випадку Теореми 1.

Зауважимо, що додатність функції $v(x, t)$ забезпечує умова (B2) Теореми 3.

Як і у випадку крайових умов Діріхле, єдиність розв'язку доводиться від супротивного. Припустивши, що існує два розв'язки $(b_{1i}, b_{2i}, u_i), i = 1, 2$ задачі (1), (2), (39), (4), (5), для різниць $b_1(t) = b_{11}(t) - b_{12}(t), b_2(t) = b_{21}(t) - b_{22}(t), u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$, отримаємо рівняння (26) з умовами (27), (29), (30) та однорідними крайовими умовами

$$u_x(0, t) = u_x(h, t) = 0, \quad t \in [0, T]. \quad (51)$$

За допомогою функції Гріна $G_2^* = G_2^*(x, t, \xi, \tau)$ другої крайової задачі для рівняння (31) розв'язок задачі (26), (27), (51) подамо у вигляді

$$u(x, t) = \int_0^t \int_0^h G_2^*(x, t, \xi, \tau) (b_1(\tau)\xi + b_2(\tau)) u_{2\xi}(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (x, t) \in \overline{Q}_T. \quad (52)$$

Після диференціювання (52) за змінною x , отримаємо

$$u_x(x, t) = \int_0^t \int_0^h G_{2x}^*(x, t, \xi, \tau) (b_1(\tau)\xi + b_2(\tau)) u_{2\xi}(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (x, t) \in \overline{Q}_T. \quad (53)$$

Для функцій $b_1 = b_1(t), b_2 = b_2(t)$ знаходимо рівняння

$$b_1(t) = \left(\left(b_{21}(t)u(0, t) - (hb_{11}(t) + b_{21}(t))u(h, t) - \int_0^h c(x, t)u(x, t)dx \right) (hu_2(h, t) - \mu_3(t)) \right)$$

$$\begin{aligned}
& - \left((a(t) - h^2 b_{11}(t) - h b_{21}(t))u(h, t) - a(t)u(0, t) - \int_0^h x c(x, t)u(x, t) dx \right) \\
& \times (u_2(h, t) - u_2(0, t)) \Big) \Delta_2^{-1}, \quad t \in [0, T_0], \tag{54}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_2(t) = & \left(\left((a(t) - h^2 b_{11}(t) - h b_{21}(t))u(h, t) - a(t)u(0, t) - \int_0^h x c(x, t)u(x, t) dx \right) \right. \\
& \times (h u_2(h, t) - \mu_3(t)) - \left(b_{21}(t)u(0, t) - (h b_{11}(t) + b_{21}(t))u(h, t) - \int_0^h c(x, t)u(x, t) dx \right) \\
& \left. \times (h^2 u_2(h, t) - 2\mu_4(t)) \right) \Delta_2^{-1}, \quad t \in [0, T_0], \tag{55}
\end{aligned}$$

де вираз Δ_2 визначається за формулою

$$\Delta_2 = (h u_2(h, t) - \mu_3(t))^2 - (u_2(h, t) - u_2(0, t))(h^2 u_2(h, t) - 2\mu_4(t)). \tag{56}$$

Відмінність від нуля цього виразу на відрізку $[0, T_0]$ гарантує умова (B2) Теорема 3.

Підставивши (52), (53) в (54), (55) приходимо до системи однорідних інтегральних рівнянь Вольтера другого роду вигляду (36), (37). Те, що ядра цієї системи мають інтегровні особливості впливає з оцінок (38). Доведення єдиності розв'язку завершується як у випадку Теорема 2.

Зауважимо також, що для доведення єдиності розв'язку достатньо виконання лише умови (B2) Теорема 3. Крім того, на відміну від крайових умов Діріхле, єдиним є не глобальний, а локальний розв'язок задачі (1), (2), (39), (4), (5). \square

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Боднарчук А., Гузик Н. *Коефіцієнтна обернена задача для параболічного рівняння з довільним слабким вирожденням*. Вісн. Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2011, **75**, 28-42.
- [2] Пабіривська Н., Вареник О. *Визначення молодшого коефіцієнта у параболічному рівнянні*. Вісн. Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2005, **64**, 181-189.
- [3] Azizbayov Elvin. *The nonlocal inverse problem of the identification of the lowest coefficient and the right-hand side in a second-order parabolic equation with integral conditions*. Bound Value Probl 2019, **11**, 1-19. doi: 10.1186/s13661-019-1126-z
- [4] Hussein M., Lesnic D. and Ismailov M. *An inverse problem of finding the time-dependent diffusion coefficient from an integral condition*. Mathematical Methods in the Applied Sciences 2016, **39** (5), 963-980. <https://doi.org/10.1002/mma.3482>
- [5] Hussein M., Lesnic D., Ivanchov M., Snitko H. *Multiple time-dependent coefficient identification on thermal problems with a free boundary*. Applied Numerical Mathematics 2016, **99**, 24-50. <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2015.09.001>
- [6] Hussein M.S., Lesnic D., Kamynin V. and Kostin A. *Direct and inverse source problems for degenerate parabolic equations*. Journal of Inverse and Ill-posed Problems 2020. **28** (3), 425-448. DOI: 10.1515/jiip-2019-0046

- [7] Huzyk N. *Inverse problem of determining the coefficients in a degenerate parabolic equation*. Electronic Journal of Differential Equations 2014, **2014** (172), 1–11.
- [8] Ivanchov M., Inverse problems for equations of parabolic type, VNTL Publishers, Lviv, 2003.
- [9] Ivanchov M. and Saldina N. *An inverse problem for strongly degenerate heat equation*. J. Inv. Ill-Posed Problems 2006, **14** (5), 465-480. DOI: <https://doi.org/10.1515/156939406778247598>
- [10] Ivanchov M. and Vlasov V. *Inverse problem for a two-dimensional strongly degenerate heat equation*. Electronic Journal of Differential Equations 2018, **2018** (77), 1–17.
- [11] Kabanikhin S., Inverse and ill-posed problems: theory and applications, De Gruyter, 2012. DOI: <https://doi.org/10.1515/9783110224016>
- [12] Kinash N.YE. *An inverse problem for a 2d parabolic equation with nonlocal overdetermination condition*. Carpathian Math. Publ. 2016, **8** (1), 107–117. doi:10.15330/cmp.8.1.107-117
- [13] Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A. and Uraltseva N.N., Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, USA, 1968.
- [14] Zhi-Xue Zhaoa, Mapundi K. Bandab and Bao-Zhu Guo. *Simultaneous identification of diffusion coefficient, spacewise dependent source and initial value for one-dimensional heat equation*. Math. Meth. Appl. Sci. 2017, **40**, 3552–3565. DOI: 10.1002/mma.4245
- [15] Zui-Cha Deng, Liu Yang. *An inverse problem of identifying the coefficient of first order in a degenerate parabolic equation*. J. of Computational and Applied Math 2011, **235**, 4407-4417. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2011.04.006>

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Bodnarchuk A., Huzyk N. *Coefficient inverse problem for a parabolic equation with an arbitrary weak degeneration*. Visnyk Lviv. Univ. Ser. Mech.-Math. 2011, **75**, 28-42. (in Ukrainian)
- [2] Pabyrivska N., Varenik O. *Determination of the younger coefficient in a parabolic equation*. Visnyk Lviv. Univ. Ser. Mech.-Math. 2005, **64**, 181-189. (in Ukrainian)
- [3] Azizbayov Elvin. *The nonlocal inverse problem of the identification of the lowest coefficient and the right-hand side in a second-order parabolic equation with integral conditions*. Bound Value Probl 2019, **11**, 1-19. doi: 10.1186/s13661-019-1126-z
- [4] Hussein M., Lesnic D. and Ismailov M. *An inverse problem of finding the time-dependent diffusion coefficient from an integral condition*. Mathematical Methods in the Applied Sciences 2016, **39** (5), 963-980. <https://doi.org/10.1002/mma.3482>
- [5] Hussein M., Lesnic D., Ivanchov M., Snitko H. *Multiple time-dependent coefficient identification thermal problems with a free boundary*. Applied Numerical Mathematics 2016, **99**, 24-50. <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2015.09.001>
- [6] Hussein M.S., Lesnic D., Kamynin V. and Kostin A. *Direct and inverse source problems for degenerate parabolic equations*. Journal of Inverse and Ill-posed Problems 2020. **28** (3), 425-448. DOI: 10.1515/jiip-2019-0046
- [7] Huzyk N. *Inverse problem of determining the coefficients in a degenerate parabolic equation*. Electronic Journal of Differential Equations 2014, **2014** (172), 1–11.
- [8] Ivanchov M., Inverse problems for equations of parabolic type, VNTL Publishers, Lviv, 2003.
- [9] Ivanchov M. and Saldina N. *An inverse problem for strongly degenerate heat equation*. J. Inv. Ill-Posed Problems 2006, **14** (5), 465-480. DOI: <https://doi.org/10.1515/156939406778247598>

- [10] Ivanchov M. and Vlasov V. *Inverse problem for a two-dimensional strongly degenerate heat equation*. Electronic Journal of Differential Equations 2018, **2018** (77), 1–17.
- [11] Kabanikhin S., *Inverse and ill-posed problems: theory and applications*, De Gruyter, 2012. DOI: <https://doi.org/10.1515/9783110224016>
- [12] Kinash N.YE. *An inverse problem for a 2d parabolic equation with nonlocal overdetermination condition*. Carpathian Math. Publ. 2016, **8** (1), 107–117. doi:10.15330/cmp.8.1.107-117
- [13] Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A. and Uraltseva N.N., *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, USA, 1968.
- [14] Zhi-Xue Zhaoa, Mapundi K. Bandab and Bao-Zhu Guo. *Simultaneous identification of diffusion coefficient, spacewise dependent source and initial value for one-dimensional heat equation*. Math. Meth. Appl. Sci. 2017, **40**, 3552–3565. DOI: 10.1002/mma.4245
- [15] Zui-Cha Deng, Liu Yang. *An inverse problem of identifying the coefficient of first order in a degenerate parabolic equation*. J. of Computational and Applied Math 2011, **235**, 4407-4417. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2011.04.006>

Надійшло 14.12.2020

Brodyak O.Ya., Huzyk N.M. *Coefficient inverse problems for the parabolic equation with general weak degeneration*, Bukovinian Math. Journal. **9**, 1 (2021), 91–106.

It is investigated the inverse problems for the degenerate parabolic equation. The minor coefficient of this equation is a linear polynomial with respect to space variable with two unknown time-dependent functions. The degeneration of the equation is caused by the monotone increasing function at the time derivative. It is established conditions of existence and uniqueness of the classical solutions to the named problems in the case of weak degeneration.