Bukovinian Math. Journal. 2020, **8**, 2, 127–138 Буковинський матем. журнал 2020, Т.8, №2, 127–138

Чуйко С.М., Чуйко О.В., Кузьміна В.О.

НЕВИРОДЖЕНІ ЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛЬНО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ, НЕ РОЗВ'ЯЗАНІ ВІДНОСНО ПОХІДНОЇ

Знайдено конструктивні умови існування розв'язків лінійної невиродженої інтегрально-диференціальної крайової задачі, не розв'язаної відносно похідної. Запропоновано схему знаходження розв'язку лінійної невиродженої інтегрально-диференціальної крайової задачі, як у критичному, так і в некритичному випадках.

Ключові слова і фрази: Інтегрально-диференціальні рівняння, крайові задачі, не розв'язані відносно похідної.

Donbass State Pedagogical University, Slaviansk, Ukraine,
e-mail: *chujko-slav@ukr.net.*

1 Постановка задачі

Досліджено задачу про побудову розв'язків [1]

$$y(t) \in \mathbb{D}^2[a;b], \quad y'(t) \in \mathbb{L}^2[a;b]$$

лінійної інтегрально-диференціальної системи, не розв'язаної відносно похідної

$$A(t)y'(t) = B(t)y(t) + \Phi(t)\int_a^b F(y(s), y'(s), s)ds + f(t), \tag{1}$$

підпорядкованих крайовій умові

$$\ell y(\cdot) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^p. \tag{2}$$

Розв'язок крайової задачі (1), (2) шукаємо в околі розв'язку

$$y_0(t) \in \mathbb{D}^2[a;b], \quad y_0'(t) \in \mathbb{L}^2[a;b]$$

породжуючої нетерової $n \neq p$ крайової задачі

$$A(t)y_0'(t) = B(t)y_0(t) + f(t), \quad \ell y_0(\cdot) = \alpha. \tag{3}$$

УДК 517.9
2010 *Mathematics Subject Classification:* 45E99.
Роботу виконано за фінансової підтримки МОН України. Номер державної реєстрації 0118U00531.

Тут

$$A(t), B(t) \in \mathbb{L}^2_{m\times n}[a;b] := \mathbb{L}^2[a;b] \otimes \mathbb{R}^{m\times n}, \quad \Phi(t) \in \mathbb{L}^2_{m\times q}[a;b], \quad f(t) \in \mathbb{L}^2[a;b].$$

Матрицю $A(t)$ припускаємо прямокутною, або ж квадратною, але виродженою. Вектор-функція $F(y(t), y'(t), t)$ лінійна за розв'язком $y(t)$ крайової задачі (1), (2) та його похідною $y'(t)$, а також неперервна за третім аргументом на відрізку $[a;b]$;

$$\ell y(\cdot):\ \mathbb{D}^2[a;b] \to \mathbb{R}^p$$

— лінійний обмежений векторний функціонал, визначений на просторі $\mathbb{D}^2[a;b]$ n-вимірних абсолютно неперервних на відрізку $[a,b]$ функцій [1].

Поставлена задача продовжує дослідження лінійної інтегрально-диференціальної крайової задачі [2, 3] на випадок лінійної крайової задачі (1) з прямокутною матрицею при похідній [4, 5, 6]. За умови [6]

$$P_{A^*(t)} \equiv 0 \tag{4}$$

система (3) розв'язна відносно похідної

$$z' = A^+(t)B(t)z + \mathfrak{F}_0(t, \nu_0(t)); \tag{5}$$

тут $\operatorname{rank} A(t) := \sigma_0 = m \leq n$. Крім того

$$\mathfrak{F}_0(t, \nu_0(t)) := A^+(t)f(t) + P_{A_{\rho_0}}(t)\nu_0(t),$$

$A^+(t)$ — псевдообернена (по Муру – Пенроузу) матриця, $P_{A^*(t)}$ — матриця-ортопроектор:

$$P_{A^*}(t) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{N}(A^*(t)),$$

$P_{A_{\rho_0}}(t)$ — $(n \times \rho_0)$— матриця, утворена з ρ_0 лінійно-незалежних стовпців $(n \times n)$— матриці-ортопроектора $P_A(t) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{N}(A(t))$. У випадку (4) інтегрально-диференціальну систему (1) будемо називати невиродженою [6]. За умови $\rho_0 \neq 0$ система (5), розв'язана відносно похідної, залежить від довільної неперервної вектор-функції $\nu_0(t)$. Позначимо $X_0(t)$ нормальну фундаментальну матрицю

$$X_0'(t) = A^+(t)B(t)X_0(t),\ X_0(a) = I_n$$

отриманої системи звичайних диференціальних рівнянь (5).

2 Критичний випадок

Як відомо [1], у критичному випадку

$$P_{Q^*} \neq 0, \quad Q := \ell X(\cdot) \in \mathbb{R}^{p\times n}$$

для фіксованої неперервної функції $\nu_0(t) \in \mathbb{L}^2[a;b]$ породжуюча крайова задача (3) розв'язна тоді й тільки тоді, коли виконується умова

$$P_{Q_d^*}\Big\{\alpha - \ell K[f(s)](\cdot)\Big\} = 0; \tag{6}$$

при цьому r-параметрична сім'я розв'язків породжуючої задачі (3)

$$y_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f(s); \alpha](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r$$

зображується за допомогою узагальненого оператора Гріна

$$G[f(s); \alpha](t) := X(t)Q^+ \Big\{ \alpha - \ell K[f(s)](\cdot) \Big\} + K[f(s)](t).$$

Тут

$$K\Big[f(s)\Big](t) := X(t) \int_a^t X^{-1}(s)\mathfrak{F}_0(s, \nu_0(s))\, ds$$

— оператор Гріна задачі Коші $y_0(a) = c$ для породжуючої системи (3), $X_r(t) := X(t)P_{Q_r}$; матриця $P_{Q_r} \in \mathbb{R}^{p\times r}$, утворена з r лінійно-незалежних стовпців матриці-ортопроектора

$$P_Q : \mathbb{R}^p \to \mathbb{N}(Q).$$

Матриця $P_{Q_d^*} \in \mathbb{R}^{d\times p}$, утворена з d лінійно-незалежних рядків матриці-ортопроектора

$$P_{Q^*} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{N}(Q^*).$$

У критичному випадку розв'язок крайової задачі (1), (2) шукаємо у вигляді

$$y(t) = y_0(t, c_r) + x(t).$$

Для знаходження відхилення

$$x(t) \in \mathbb{D}^2[a; b], \quad x'(t) \in \mathbb{L}^2[a; b]$$

від породжуючого розв'язку $y_0(t, c_r)$ отримуємо крайову задачу

$$A(t)x'(t) = B(t)x(t) + \Phi(t) \int_a^b F(y(s), y'(s), s)\, ds, \quad \ell x(\cdot) = 0.$$

Відхилення

$$x(t, u, v) = X_0(t)u + \Psi(t)v$$

від породжуючого розв'язку $y_0(t, c_r)$ визначають невідомі сталі

$$v := \int_a^b F(y(s), y'(s), s)\, ds \in \mathbb{R}^q, \quad u \in \mathbb{R}^n$$

та матриця

$$\Psi(t) := K\Big[\Phi(s)\Big](t) \in \mathbb{D}^2_{n\times q}[a; b].$$

Шуканий розв'язок $y(t)$ невиродженої інтегрально-диференціальної системи (1) задовольняє крайову умову (2) у випадку

$$Q\, v + R\, u = 0, \quad R := \ell\, \Psi(\cdot) \in \mathbb{R}^{p\times q}. \tag{7}$$

Позначимо $P_\rho \in \mathbb{R}^{(q+n)\times\rho}$ матрицю, утворену з ρ лінійно-незалежних стовпців ортопроектора $P_{\check{Q}}$
$$P_{\check{Q}}: \mathbb{R}^{q+n} \to \mathbb{N}(\check{Q})$$
матриці
$$\check{Q} := [\,Q;\, R\,] \in \mathbb{R}^{p\times(q+n)}.$$
Умову (7) задовольняють вектори
$$u = P_1\, c_\rho, \quad v = P_2\, c_\rho, \quad c_\rho \in \mathbb{R}^\rho;$$
тут
$$P_\rho := \text{ col }(\,P_1,\, P_2\,), \quad P_1 \in \mathbb{R}^{n\times\rho}, \quad P_2 \in \mathbb{R}^{q\times\rho}.$$
Для знаходження вектора c_ρ, необхідного для визначення невідомих $u(c_\rho)$ та $v(c_\rho)$ отримуємо рівняння
$$\varphi(c_\rho) := \varphi(u(c_\rho), v(c_\rho)) := u(c_\rho)- \tag{8}$$
$$-\int_a^b F(y_0(t,c_r) + x(t,u,v), y_0'(t,c_r) + x'(t,u,v), t)\,dt.$$
Оскільки вектор-функція $F(y(t), y'(t), t)$ лінійна за розв'язком $y(t)$ крайової задачі (1), (2) та його похідною $y'(t)$, має місце зображення
$$F(y(t), y'(t), t) = A_1(t)y(t) + A_2(t)y'(t),$$
де
$$A_1(t) := F_y'(y(t), y'(t), t), \ A_2(t) := F_{y'}'(y(t), y'(t), t),$$
при цьому породжуюча система (3) неоднорідна, тому можна вважати $F(0,0,t) \equiv 0$. Умова розв'язності лінійного рівняння (8):
$$\varphi(c_\rho) = \mathcal{B}_0\, c_\rho + \psi(c_r), \quad \mathcal{B}_0 \in \mathbb{R}^{q\times\rho}$$
рівнозначна вимозі
$$P_{\mathcal{B}_0^*}\psi(c_r) = 0. \tag{9}$$
Тут
$$\mathcal{B}_0 := \int_a^b \Big\{ A_1(t)[X(t)P_1 + \Psi(t)P_2] +$$
$$+A_2(t)[X'(t)P_1 + \Psi'(t)P_2] \Big\}\,dt - P_2 \in \mathbb{R}^{q\times\rho},$$
крім того
$$\psi(c_r) := -\int_a^b \Big[A_1(t)y_0(t,c_r) + A_2(t)y_0'(t,c_r) \Big]\,dt,$$
$P_{\mathcal{B}_0^*}: \ \mathbb{R}^q \to \mathbb{N}(\mathcal{B}_0^*)$ — ортопроектор матриці $\mathcal{B}_0^*$. За умови (9) розв'язок лінійного рівняння (8) має вигляд
$$\check{c}_\rho = \mathcal{B}_0^+\psi(c_r) + P_{\mathcal{B}_0}\, c_\mu, \quad c_\rho \in \mathbb{R}^\rho;$$

тут $P_{\mathcal{B}_0}: \mathbb{R}^\rho \to \mathbb{N}(\mathcal{B}_0)$ — ортопроектор матриці $\mathcal{B}_0$. Таким чином, шуканий розв'язок невиродженої інтегрально-диференціальної системи (1)

$$y(t, c_\mu) = Y_\mu(t)c_\mu + G[\Phi(s); \nu_0(s)](t), \quad c_\mu \in \mathbb{R}^\mu$$

для фіксованої неперервної функції $\nu_0(t) \in \mathbb{L}^2[a; b]$ зображується за допомогою узагальненого оператора Гріна

$$G[\Phi(s); \nu_0(s)](t) := G[f(s); \alpha](t) - \mathcal{B}_0^+ \int_a^b \Big[A_1(t)G[f(s); \alpha](t) + A_2(t)G'[f(s); \alpha](t)\Big]\, dt.$$

Тут $Y_\mu(t)$ — $(n \times \mu)$ – вимірна матриця, утворена з μ лінійно-незалежних стовпців матриці

$$\Big[X_0(t) - [X_0(t)P_1 + \Psi(t)P_2]\mathcal{B}_0^+[A_1(t)X_r(t); A_2(t)X_r'(t)]dt; [X(t)P_1 + \Psi(t)P_2]P_{\mathcal{B}_0}\Big].$$

Таким чином, доведена наступна теорема.

Теорема 1. *У критичному випадку ($P_{Q^*} \neq 0$) породжуюча крайова задача (3) розв'язна тоді й тільки тоді, коли виконується умова (6); при цьому r-параметрична сім'я розв'язків породжуючої задачі (3) має вигляд*

$$y_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f(s); \alpha](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Шуканий розв'язок невиродженої інтегрально-диференціальної крайової задачі (1), (2)

$$y(t, c_\mu) = Y_\mu(t)c_\mu + G[\Phi(s); \nu_0(s)](t), \quad c_\mu \in \mathbb{R}^\mu$$

для фіксованої неперервної функції $\nu_0(t) \in \mathbb{L}^2[a; b]$ за умови (9) зображується за допомогою узагальненого оператора Гріна $G[\Phi(s); \nu_0(s)](t)$.

Приклад 1. *Вимогам доведеної теореми задовольняє задача про побудову 2π-періодичних розв'язків лінійної інтегрально-диференціальної системи*

$$A(t)y'(t) = B(t)y(t) + \Phi(t) \int_a^b F(y(s), y'(s), s)ds + f(t); \tag{10}$$

тут

$$A(t) := \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & \cos t \\ -\sin t & \cos t & -\sin t \end{pmatrix}, \quad B(t) := \begin{pmatrix} -\sin t & \cos t & -\sin t \\ -\cos t & -\sin t & -\cos t \end{pmatrix},$$

$$f(t) := \begin{pmatrix} 1 \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad \Phi(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix},$$

крім того

$$F(y(t), y'(t), t) := A_1(t)y(t) + A_2(t)y'(t), \quad A_1(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; A_2(t) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}.$$

Породжуюча система (10) задовольняє умові (4), тому інтегрально-диференціальна система (10) — невироджена, причому має місце нерівність $\rho_0 \neq 0$, отже, система (5), розв'язана відносно похідної, залежить від довільної неперервної вектор-функції; покладемо $\nu_0(t) := 0$. Для породжуючої періодичної крайової задачі у разі системи (10)

$$P_Q = P_{Q^*} = I_3 \neq 0,$$

тому має місце критичний випадок, причому виконується умова розв'язності (6), при цьому трьохпараметрична сім'я розв'язків породжуючої задачі

$$y_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f(s)](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^3$$

зображується за допомогою узагальненого оператора Гріна

$$G[f(s)](t) = \begin{pmatrix} \sin t + \sin 3t \\ \cos t - \cos 3t \end{pmatrix}$$

та нормальної фундаментальної матриці однорідної частини породжуючої системи (10)

$$X_0(t) = X_r(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\cos t & \sin t & \cos t - 1 \\ -2\,\sin t & 2\,\cos t & -2\,\sin t \\ \cos t - 1 & \sin t & 1+\cos t \end{pmatrix}.$$

Оскільки

$$Q = 0, \quad R = -\frac{\pi}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

отримуємо матриці

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Періодичний розв'язок

$$y(t) = y_0(t, c_r) + x(t), \quad x(t) = X(t)v + \Psi(t)u,$$

$$v = P_1\, c_\rho, \quad u = P_2\, c_\rho, \quad c_\rho \in \mathbb{R}^4$$

лінійної невиродженої інтегрально-диференціальної системи (10)

$$y(t, c_\mu) = Y_\mu(t)c_\mu + G[\Phi(s); \nu_0(s)](t), \quad c_\mu \in \mathbb{R}^2$$

для фіксованої неперервної функції $\nu_0(t) := 0$ зображується за допомогою узагальненого оператора Гріна

$$G[\Phi(s); \nu_0(s)](t) = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 4\,\sin t + \sin 2t \\ 6 - 4\,\cos t - 2\,\cos 2t \\ 4\,\sin t + \sin 2t \end{pmatrix}$$

та матриці

$$Y_\mu(t) = \frac{1}{2(1+\pi^2)}\begin{pmatrix} 1 + \pi \sin t & (1+2\pi^2)\sin t \\ 0 & 2(1+2\pi^2)\sin t \\ -1 + \pi \sin t & (1+2\pi^2)\sin t \end{pmatrix}.$$

3 Знаходження розв'язку у некритичному випадку.

У некритичному випадку ($P_{Q^*} = 0$) лінійна невироджена інтегрально-диференціальна крайова задача (3) розв'язна для будь-яких неоднорідностей $f(t)$ та α.

Наслідок 1. *У некритичному випадку ($P_{Q^*} = 0$) r-параметрична сім'я розв'язків породжуючої задачі (3) має вигляд*

$$y_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f(s); \alpha](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Шуканий розв'язок невиродженої інтегрально-диференціальної крайової задачі (1), (2)

$$y(t, c_\mu) = Y_\mu(t)c_\mu + G[\Phi(s); \nu_0(s)](t), \quad c_\mu \in \mathbb{R}^\mu$$

для фіксованої неперервної функції $\nu_0(t) \in \mathbb{L}^2[a; b]$ за умови (9) зображується за допомогою узагальненого оператора Гріна $G[\Phi(s); \nu_0(s)](t)$.

Приклад 2. *Вимогам наслідку задовольняє задача про побудову розв'язків лінійної антиперіодичної інтегрально-диференціальної крайової задачі*

$$A(t)y'(t) = B(t)y(t + f(t)) + \Phi(t)\times \tag{11}$$

$$\times \int_a^b F(y(s), y'(s), s)ds, \quad \ell y(\cdot) := y(0) + y(2\pi) = 0;$$

тут

$$A(t) := \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & \cos t \\ -\sin t & \cos t & -\sin t \end{pmatrix}, \quad B(t) := \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & -\cos t \\ -\sin t & \cos t & \sin t \end{pmatrix},$$

крім того

$$\Phi(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}, \quad f(t) := \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-t} \end{pmatrix},$$

де

$$F(y(t), y'(t), t) := A_1(t)y(t) + A_2(t)y'(t), \quad A_1(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ A_2(t) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}.$$

Породжуюча система (11) задовольняє умові (4), тому інтегрально-диференціальна система (11) — невироджена, причому має місце нерівність $\rho_0 \neq 0$, отже, система (5), розв'язана відносно похідної, залежить від довільної неперервної вектор-функції; покладемо $\nu_0(t) := 0$. Для породжуючої періодичної крайової задачі у разі системи (11)

$$P_Q = P_{Q^*} = 0,$$

тому має місце некритичний випадок, при цьому єдиний розв'язок породжуючої крайової задачі

$$y_0(t, c_r) = G[f(s)](t)$$

зображується за допомогою узагальненого оператора Гріна породжуючої задачі

$$G[f(s)](t) = \frac{1}{40\left(1+e^{2\pi}\right)} \begin{pmatrix} G_1[f(s)](t) \\ G_2[f(s)](t) \\ G_3[f(s)](t) \end{pmatrix},$$

де

$$G_1[f(s)](t) = 5e^{-2\pi-t}\left(1+e^{2\pi}\right)(-e^t - e^{2\pi+t} + 2e^{2\pi}\cos t + 2e^{2\pi}\sin t + 4e^{2\pi+t}\sin t),$$

$$G_2[f(s)](t) = 4e^{-2\pi-t}(4e^{2t} + 14e^{2\pi+2t} - 4e^{2\pi}\cos t -$$
$$-4e^{4\pi}\cos t - 5e^{2\pi+t}\cos t - 5e^{4\pi+t}\cos t + 2e^{2\pi}\sin t + 2e^{4\pi}\sin t - 5e^{2\pi+t}\sin t - 5e^{4\pi+t}\sin t),$$

$$G_3[f(s)](t) = 5e^{-2\pi-t}\left(1+e^{2\pi}\right)(-e^t - e^{2\pi+t} + 2e^{2\pi}\cos t + 2e^{2\pi}\sin t + 4e^{2\pi+t}\sin t).$$

Оскільки

$$Q = 0, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & \pi \\ \frac{1}{2}\left(-1+e^{2\pi}\right) & -\pi \\ 0 & \pi \end{pmatrix},$$

отримуємо матриці

$$P_1 = \begin{pmatrix} P_{1a} & P_{1b} \end{pmatrix},$$

де

$$P_{1a} = \begin{pmatrix} \frac{\left(5+6e^{2\pi}+5e^{4\pi}\right)\pi^2}{2(10+13\pi^2+6e^{2\pi}(2+\pi^2)+5e^{4\pi}(2+\pi^2))} \\ -\frac{4\left(1+e^{2\pi}\right)\pi^2}{10+13\pi^2+6e^{2\pi}(2+\pi^2)+5e^{4\pi}(2+\pi^2)} \\ \frac{\left(5+6e^{2\pi}+5e^{4\pi}\right)\pi^2}{2(10+13\pi^2+6e^{2\pi}(2+\pi^2)+5e^{4\pi}(2+\pi^2))} \end{pmatrix}, \quad P_{1b} = \begin{pmatrix} -\frac{4\left(1+e^{2\pi}\right)\pi^2}{10+13\pi^2+6e^{2\pi}(2+\pi^2)+5e^{4\pi}(2+\pi^2)} \\ \frac{2+9\pi^2-2e^{2\pi}\left(2+\pi^2\right)+e^{4\pi}\left(2+\pi^2\right)}{10+13\pi^2+6e^{2\pi}(2+\pi^2)+5e^{4\pi}(2+\pi^2)} \\ -\frac{4\left(1+e^{2\pi}\right)\pi^2}{10+13\pi^2+6e^{2\pi}(2+\pi^2)+5e^{4\pi}(2+\pi^2)} \end{pmatrix},$$

крім того

$$P_2 = \begin{pmatrix} P_{2a} & P_{2b} \end{pmatrix},$$

де

$$P_{2a} = \begin{pmatrix} -\frac{2\left(-1+e^{2\pi}\right)\pi^2}{10+13\pi^2+6e^{2\pi}(2+\pi^2)+5e^{4\pi}(2+\pi^2)} \\ -\frac{\left(5+6e^{2\pi}+5e^{4\pi}\right)\pi}{10+13\pi^2+6e^{2\pi}(2+\pi^2)+5e^{4\pi}(2+\pi^2)} \end{pmatrix}, \quad P_{2a} = \begin{pmatrix} -\frac{2\left(-1+e^{2\pi}\right)\left(1+e^{2\pi}\right)\left(2+\pi^2\right)}{10+13\pi^2+6e^{2\pi}(2+\pi^2)+5e^{4\pi}(2+\pi^2)} \\ \frac{8\left(1+e^{2\pi}\right)\pi}{10+13\pi^2+6e^{2\pi}(2+\pi^2)+5e^{4\pi}(2+\pi^2)} \end{pmatrix}.$$

Таким чином, отримуємо нерівність

$$\det \mathcal{B}_0 \neq 0,$$

де

$$\det \mathcal{B}_0 = \frac{2\left(-1+e^{4\pi}\right)\pi\left(-1+2\pi^2\right)}{10+13\pi^2+6e^{2\pi}\left(2+\pi^2\right)+5e^{4\pi}\left(2+\pi^2\right)}.$$

Остання нерівність у випадку лінійної інтегрально-диференціальної крайової задачі (11) забезпечує виконання умови (9). Шуканий розв'язок лінійної інтегрально-диференціальної крайової задачі (11) для фіксованої неперервної функції $\nu_0(t) := 0$ єдиний

$$y(t) = G[\Phi(s); \nu_0(s)](t)$$

і зображується за допомогою узагальненого оператора Гріна лінійної інтегрально-диференціальної крайової задачі (11)

$$G[\Phi(s);\nu_0(s)](t)=\frac{1}{40\,(1+e^{2\pi})\,(-1+2\pi^2)}\begin{pmatrix} G_1[\Phi(s);\nu_0(s)](t)\\ G_2[\Phi(s);\nu_0(s)](t)\\ G_3[\Phi(s);\nu_0(s)](t)\end{pmatrix},$$

де

$$G_1[\Phi(s);\nu_0(s)](t)=-5e^{-2\pi-t}(1+e^{2\pi})(e^t(1+\pi)(-1+e^{2\pi}(-1+2\pi))+(e^{2\pi}(2-4\pi^2)-$$
$$-e^{2\pi+t}t+e^t(1+2\pi)t)\cos t+(e^{2\pi}(2-4\pi^2)+e^t(-2-3\pi+\pi^2)+e^{2\pi+t}(6-\pi-9\pi^2+2\pi^3))\sin t),$$
$$G_2[\Phi(s);\nu_0(s)](t)=e^{-2\pi-t}(-2e^{2t}(3-\pi^2+e^{2\pi}(33-10\pi-61\pi^2+10\pi^3))+(1+e^{2\pi})(e^{2\pi}(16-$$
$$-32\pi^2)+5e^{2\pi+t}(5-\pi-9\pi^2+2\pi^3-t)+5e^t(-1+\pi^2+t+\pi(-1+2t)))\cos t+$$
$$+(1+e^{2\pi})(8e^{2\pi}(-1+2\pi^2)+5e^{2\pi+t}(6-\pi-9\pi^2+2\pi^3+t)+5e^t(-2+\pi^2-t-$$
$$-\pi(3+2t)))\sin t),$$
$$G_3[\Phi(s);\nu_0(s)](t)=-5e^{-2\pi-t}(1+e^{2\pi})(e^t(1+\pi)(-1+e^{2\pi}(-1+2\pi))+(e^{2\pi}(2-4\pi^2)-$$
$$-e^{2\pi+t}t+e^t(1+2\pi)t)\cos t+(e^{2\pi}(2-4\pi^2)+e^t(-2-3\pi+\pi^2)+$$
$$+e^{2\pi+t}(6-\pi-9\pi^2+2\pi^3))\sin t).$$

У випадку виродженості:

$$P_{A^*(t)}\neq 0$$

лінійної інтегрально-диференціальної крайової задачі (1), (2) для її дослідження можна використовувати схему [6, 7, 8]. У випадку нерозв'язності лінійної інтегрально-диференціальної крайової задачі (1), (2) її можна регуляризовати аналогічно [9, 10, 11, 12]. Зазначимо також, що запропонована у статті схема дослідження лінійної невиродженої інтегрально-диференціальної крайової задачі (1), (2) може бути перенесена на невироджені інтегрально-диференціальні крайові задачі з запізненням [1, 13, 14]. І, нарешті, доведена теорема узагальнює результати дослідження лінійної інтегрально-диференціальної крайової задачі [2, 3, 15] на випадок лінійної крайової задачі (1) з прямокутною матрицею при похідній [4, 5, 6, 7, 8].

Список літератури

[1] Boichuk A.A., Samoilenko A.M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems; 2-th edition. De Gruyter, Berlin; Boston, 2016.

[2] Самойленко А.М., Бойчук О.А., Кривошея С.А. *Крайові задачі для систем лінійних інтегро-диференціальних рівнянь типу Фредгольма з виродженим ядром*, Укр. мат. журн, **48**, 1996, (11), 1576–1579 (in ukrainian).

[3] Чечетенко В.О., Чуйко С.М., Чуйко О.С. *Метод Ньютона-Канторовича у теорії нелінійних інтегрально-диференціальних крайових задач*, Буковинський математичний журнал, – **6**. 2018, (1–2), 122–128 (in ukrainian).

[4] Campbell S.L. Singular Systems of differential equations, Pitman Advanced Publishing Program, San Francisco-London-Melbourne, 1980.

[5] Чистяков В.Ф. Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром, Наука, Новосибирск, 1996.

[6] Chuiko S.M. *On a reduction of the order in a differential-algebraic system*, Journal of Mathematical Sciences, **235**. 2018, (1), 2–18.

[7] Chuiko S.M. *The method of least squares in the theory of Noetherian differential-algebraic boundary-value problems*, Journal of Mathematical Sciences, **242**, (3), 381–392.

[8] Chuiko S.M. *A generalized Green operator for a linear Noetherian differential-algebraic boundary value problem*, Siberian Advances in Mathematics, **30**, 2020, 177–191.

[9] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач, Наука, М., 1986 (in russian).

[10] Чуйко С.М., Чуйко О.В. *Регуляризація періодичної крайової задачі за допомогою імпульсного впливу*, Буковинський математичний журнал, **1**, 2013, (3–4), 158–161 (in ukrainian).

[11] Chuiko S.M. *On the regularization of a matrix differential-algebraic boundary-value problem*, Journal of Mathematical Sciences, **220**, 2017, (5), 591–602.

[12] Boichuk A.A., Pokutnyi A.A., Chistyakov V.F. *Application of perturbation theory to the solvability analysis of differential algebraic equations*, Computational Mathematics and Mathematical Physics, **53**, 2013, (6), 777–788.

[13] Бігун Я.Й. *Існування розв'язку та усереднення нелінійних багаточастотних задач із запізненням*, Укр. мат. журн, **59**, 2007, (4), 435–446.

[14] Chuiko S.M. *On the solution of a linear Noetherian boundary-value problem for a differential-algebraic system with concentrated delay by the method of least squares*, Journal of Mathematical Sciences, **246**, 2020, (3), 622–630.

[15] Boichuk A.A., Holovats'ka I.A. *Boundary-value problems for systems of integrodifferential equations*, Journal of Mathematical Sciences, **203**, 2014, (3), 306–321.

1. Boichuk A.A., Samoilenko A.M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems; 2-th edition. De Gruyter, Berlin; Boston, 2016.

2. Samoilenko A.M., Boichuk A.A., Krivosheya S.A. *Boundary value problems for systems of integro-differential equations with Degenerate Kernel*, Ukrainian Mathematical Journal. — 1996. — **48**. — № 11. — pp. 1785 — 1789.

3. Chechetenko V.O., Chuiko S.M., Chuiko O.V. *The Newton-Kantorovich method in theory of linear integro-differential boundary value problems*, Bukovinsky Mathematical Journal, **6**, 2018, (1–2), 122–128 (in ukrainian).

4. Campbell S.L. Singular Systems of differential equations, Pitman Advanced Publishing Program, San Francisco-London-Melbourne, 1980.

5. Chistyakov V.F. Algebraic differential operators with a finite-dimensional kernel, Nauka, Siberian Publishing House, Novosibirsk, 1996.

6. Chuiko S.M. *On a reduction of the order in a differential-algebraic system*, Journal of Mathematical Sciences, **235**. 2018, (1), 2–18.

7. Chuiko S.M. *The method of least squares in the theory of Noetherian differential-algebraic boundary-value problems*, Journal of Mathematical Sciences, **242**, (3), 381–392.

8. Chuiko S.M. *A generalized Green operator for a linear Noetherian differential-algebraic boundary value problem*, Siberian Advances in Mathematics, **30**, 2020, 177–191.

9. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. Methods for dealing with incorrect problems, Nauka, M., 1986 (in russian).

10. Chuiko S.M., Chuiko O.V. Regularization of the periodic boundary value problem with impulse influence // Bukovinsky Mathematical Journal, **1**, 2013, (3–4), 158–161 (in ukrainian).

11. Chuiko S.M. *On the regularization of a matrix differential-algebraic boundary-value problem*, Journal of Mathematical Sciences, **220**, 2017, (5), 591–602.

12. Boichuk A.A., Pokutnyi A.A., Chistyakov V.F. *Application of perturbation theory to the solvability analysis of differential algebraic equations*, Computational Mathematics and Mathematical Physics, **53**, 2013, (6), 777–788.

13. Bihun Ya.J. *Existence of solution and averaging of nonlinear multifrequency problems with delay*, Ukr. math. Journal, **59**, 2007, (4), 435–446.

14. Chuiko S.M. *On the solution of a linear Noetherian boundary-value problem for a differential-algebraic system with concentrated delay by the method of least squares*, Journal of Mathematical Sciences, **246**, 2020, (3), 622–630.

15. Boichuk A.A., Holovats'ka I.A. *Boundary-value problems for systems of integrodifferential equations*, Journal of Mathematical Sciences, **203**, 2014, (3), 306–321.

Надійшло 09.11.2020

Chuiko S.M., Chuiko O.V., Kuzmina V.O. *Nonsingular integro-differential boundary value problem not solved with respect to the derivative*, Bukovinian Math. Journal. **8**, 2 (2020), 127–138.

The study of the differential-algebraic boundary value problems was established in the papers of K. Weierstrass, M.M. Lusin and F.R. Gantmacher. Works of S. Campbell, Yu.E. Boyarintsev, V.F. Chistyakov, A.M. Samoilenko, M.O. Perestyuk, V.P. Yakovets, O.A. Boichuk, A. Ilchmann and T. Reis are devoted to the systematic study of differential-algebraic boundary value problems. At the same time, the study of differential-algebraic boundary-value problems is closely related to the study of linear boundary-value problems for ordinary differential equations, initiated in the works of A. Poincare, A.M. Lyapunov, M.M. Krylov, N.N. Bogolyubov, I.G. Malkin, A.D. Myshkis, E.A. Grebenikov, Yu.A. Ryabov, Yu.A. Mitropolsky, I.T. Kiguradze, A.M. Samoilenko, M.O. Perestyuk and O.A. Boichuk.

The study of the linear differential-algebraic boundary value problems is connected with numerous applications of corresponding mathematical models in the theory of nonlinear oscillations, mechanics, biology, radio engineering, the theory of the motion stability. Thus, the actual problem is the transfer of the results obtained in the articles and monographs of S. Campbell, A.M. Samoilenko and O.A. Boichuk on the linear boundary value problems for the integro-differential boundary value problem not solved with respect to the derivative, in particular, finding the necessary and sufficient conditions of the existence of the desired solutions of the linear integro-differential boundary value problem not solved with respect to the derivative.

In this article we found the conditions of the existence and constructive scheme for finding the solutions of the linear Noetherian integro-differential boundary value problem not solved with respect to the derivative. The proposed scheme of the research of the nonlinear Noetherian integro-differential boundary value problem not solved with respect to the derivative in the critical case in this article can be transferred to the seminonlinear integro-differential boundary value problem not solved with respect to the derivative.