Слюсарчук В.Ю.

ЩІЛЬНІСТЬ МНОЖИН ЗАДАЧ КОШІ БЕЗ РОЗВ'ЯЗКІВ І З НЕЄДИНИМИ РОЗВ'ЯЗКАМИ У МНОЖИНІ ВСІХ ЗАДАЧ КОШІ

При знаходженні розв'язків диференціальних рівнянь потрібно враховувати теореми про існування та єдиність розв'язків рівнянь. У випадку невиконання умов цих теорем методи знаходження розв'язків досліджуваних рівнянь, що використовуються в обчислювальній математиці, можуть давати хибні результати. Також потрібно враховувати те, що задача Коші для диференціальних рівнянь може не мати розв'язків або мати нескінченну множину розв'язків.

У статті наведено отримані автором два твердження про щільність множин задачі Коші без розв'язків (у випадку нескінченновимірного банахового простору) і з багатьма розв'язками (у випадку довільного банахового простору) у множині всіх задач Коші.

За допомогою двох прикладів задачі Коші для диференціальних рівнянь показано недосконалість деяких методів обчислювальної математики для знаходження розв'язків досліджуваних рівнянь.

Ключові слова і фрази: теореми про існування розв'язків задачі Коші, теореми про єдиність розв'язків задачі Коші, задачі Коші без розв'язків, задачі Коші з багатьма розв'язками.

National University of Water and Environmental Engineering, Rivne, Ukraine
e-mail: *V.E.Slyusarchuk@gmail.com*

Вступ

Стаття присвячена проблемі щільності множин задач Коші без розв'язків і з багатьма розв'язками у множині всіх задач Коші та значенню цієї властивості множин задач Коші для обчислювальної математики. Ця стаття – доповідь на міжнародній науковій конференції, що була присвячена 100-річчю від дня народження професора С.Д. Ейдельмана і проводилася 16–19 вересня 2020 року в Чернівецькому національному університеті імені Юрія Федьковича [1].

УДК 517.911
2010 *Mathematics Subject Classification:* 47E05, 58D25.

1 Щільність множини задач Коші без розв'язків у множині всіх задач Коші

Нехай E – довільний банахів простір із нормою $\|\cdot\|$, $\mathbb{R}$ – множина всіх дійсних чисел, G – область у просторі $\mathbb{R}\times E$ і $f : G \to E$ – неперервне відображення.

Зафіксуємо довільну точку $(t_0, x_0) \in G$ і розглянемо задачу Коші

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)),\ x(t_0) = x_0. \tag{1}$$

Для цієї задачі важливим є наступне твердження (теорема Пеано).

Теорема 1. *При виконанні наведених вимог у випадку скінченновимірного простору E задача Коші* (1) *має хоча б один розв'язок.*

Доведення цієї теореми або її окремих випадків містяться в багатьох книгах із теорії звичайних диференціальних рівнянь (див., наприклад, [2], [3], [4], [5]).

Зазначимо, що в теоремі Пеано вимога скінченної розмірності простору E є суттєвою, що підтверджується наступним твердженням (теоремою Годунова [6]).

Теорема 2. *Кожний банахів простір, в якому справедлива теорема Пеано, скінченновимірний.*

Згідно з цією теоремою для кожного нескінченновимірного банахового простору E існують неперервне відображення $f : G \to E$ і точка $(t_0, x_0) \in G$, для яких задача Коші (1) не має жодного розв'язку (таке відображення наведено в [6]). Те, що існують банахові простори, в яких теорема Пеано хибна, показано в 1950 році Ж. Дьєдонне [7] (таку властивість має простір c_0).

Аналог теореми Годунова справджується і для довільного ненормованого простору Фреше, що показано С. Г. Лобановим [8] і С. А. Шкаріним [9]. Сильніший результат встановлено в статті С. Г. Лобанова і О. Г. Смолянова [10], де показано, що для довільного ненормованого простору Фреше E існує таке неперервне відображення $f : E \to E$, що рівняння $\frac{dx}{dt} = f(x)$ не має ніяких розв'язків.

Таким чином, прикладів задач Коші без розв'язків є достатньо багато.

Мною було показано, що *у випадку нескінченновимірного банахового простору E множина задач Коші* (1) *із порожньою множиною розв'язків є щільною у множині всіх задач Коші* [11].

Правильним є встановлене в [11] таке твердження.

Теорема 3. *Нехай E і $f : \mathbb{R}\times E \to E$ – довільні нескінченновимірний банахів простір і неперервне відображення відповідно.*

Тоді для довільних точки $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}\times E$ і числа $\varepsilon > 0$ існує таке неперервне відображення $g : \mathbb{R}\times E \to E$, що

$$\sup_{(t,x)\in\mathbb{R}\times E} \|g(t,x) - f(t,x)\| \leqslant \varepsilon$$

задача

$$\frac{dz(t)}{dt} = g(t, z(t)),\ t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta),\ z(t_0) = z_0$$

не має жодного розв'язку для кожного $\delta > 0$.

2 Щільність множини задач Коші з неєдиними розв'язками у множині всіх задач Коші

У випадку виконання умов теореми Пеано задача Коші може мати неєдиний розв'язок. Якщо ця Коші має більше одного розв'язку, то у випадку скінченновимірного простору E вона має незліченну множину розв'язків (див. теорему Кнезера [4, с. 28–30], [12]).

Задач Коші з неєдиними розв'язками є достатньо багато. *Такі задачі утворюють множину, що є щільною у множині всіх задач Коші.*

Правильним є встановлене в [13], [14] таке твердження.

Теорема 4. *Нехай* G *– область у просторі* $\mathbb{R} \times E$ *і* $f : G \to E$ *– довільне неперервне відображення (банахів простір* E *може мати довільну розмірність).*

Тоді для довільних точки $(t_0, x_0) \in G$ *і числа* $\varepsilon > 0$ *існує таке неперервне відображення* $g : G \to E$*, що*

$$\sup_{(t,x)\in G} \|g(t, x) - f(t, x)\| \leqslant \varepsilon$$

і задача Коші

$$\frac{dx(t)}{dt} = g(t, x(t)),\ x(t_0) = x_0$$

має більше одного розв'язку.

3 Важливі приклади, пов'язані з теоремами 3 і 4

Не завжди вдається знайти розв'язок задачі Коші точно. Тому знаходять цей розв'язок наближено, використовуючи методи обчислювальної математики. Найпростіший із цих методів – метод Ейлера [15].

Покажемо, що використання цього методу може давати хибну інформацію про розв'язки диференціальних рівнянь.

Приклад 1. Будемо знаходити розв'язок задачі Коші

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)),\ x(t_0) = x_0, \tag{2}$$

за допомогою методу Ейлера.

Ми отримаємо функцію $x_*(t)$, породжену ломаною Ейлера, вважаючи, що ця функція є розв'язком задачі (2) з певною похибкою. Таку функцію ми будемо отримувати завжди, як у випадку задачі (2) без розв'язків, так і у випадку цієї задачі з багатьма розв'язками.

Зазначимо, що функція $x_*(t)$, знайдена за допомогою методу Ейлера, єдина.

В обох випадках ми отримуємо хибну інформацію про розв'язки розглянутої задачі.

Приклад 2. Розв'язками задачі Коші

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{|x|}, \ x(0) = 0 \tag{3}$$

є функції

$$x = 0, \tag{4}$$

$$x = \begin{cases} -4^{-1}(t - c_1)^2, & \text{якщо } t < c_1, \\ 0, & \text{якщо } t \geqslant c_1, \end{cases} \tag{5}$$

$$x = \begin{cases} 0, & \text{якщо } t < c_2, \\ 4^{-1}(t - c_2)^2, & \text{якщо } t \geqslant c_2, \end{cases} \tag{6}$$

і

$$x = \begin{cases} -4^{-1}(t - c_1)^2, & \text{якщо } t < c_1, \\ 0, & \text{якщо } c_1 \leqslant t \leqslant c_2, \\ 4^{-1}(t - c_2)^2, & \text{якщо } t > c_2, \end{cases} \tag{7}$$

де c_1 і c_2 – довільні числа із проміжків $(-\infty, 0]$ і $[0, +\infty)$ відповідно.

При застосуванні методу Ейлера до задачі (3) ми отримаємо лише розв'язок (4) і не отримуємо розв'язки (5), (6) та (7). Отже, застосування методу Ейлера до задачі (3) приводить до втрати інформації про розв'язки цієї задачі.

Зазначимо, що застосування до знаходження розв'язків задач Коші в прикладах 1 і 2 методу послідовних наближень, що використовується в доведенні теореми Пікара (див. [5, с. 392]), також приводить до аналогічних результатів.

Очевидно, що при знаходженні розв'язків задачі Коші, потрібно перевіряти виконання умов теорем Пікара [5], Пеано, Осгуда [3] чи інших теорем. Якщо умови цих теорем не виконуються, то потрібно з'ясовувати, чи не має місце один із випадків, описаних у теоремах 3 і 4.

Список літератури

[1] Slyusarchuk V. On the denseness of sets of Cauchy problems withhout solutions and with nonunique solutions in the set of all Cauchy problems. Proceedings of the international conference dedicated to the 100th anniversary of the blrth of Professor S. D. Eidelman "Modern problems of differential equations and their application", Chernivtsi, Ukraine, September 16–19, 2020, Chernivtsi National University, Chernivtsi, 2020, 189–190.

[2] Nemytskiy V. V., Stepanov V. V. Qualitative theory of differential equations. Gostekhizdat, Moscow-Leningrad, 1949. (in Russian)

[3] Petrovsky I. G. Lectures on the theory of ordinary differential equations. Nauka, Moscow, 1970. (in Russian)

[4] Hartman P. Ordinary differential equations. John Wiley & Sons, New York-London-Sydney, 1964.

[5] Samoilenko A. M., Perestyuk M. O., Parasyuk I. O. Differential equations. Lybid, Kyiv, 2003. (in Ukrainian)

[6] Godunov A. N. *Peano's theorem in Banach spaces.* Funct Anal its Appl. 1975, **9** (1) (59–60). DOI:10.1007/BF01078180 (in Russian)

[7] Dieudonné J. *Deux exemples singuliers d'équvations différentielles.* Acta. Sci. Math. 1950, **12** (Pats B) (38–40).

[8] Lobanov S. G. *Peano's theorem is false for any infinite-dimensional Fréchet space.* Russian Acad. Sci. Sb. Math. 1994, **78** (1) (211–214). DOI:10.1070/SM1994v078n01ABEH003465 (in Russian)

[9] Shkarin S. A. *Peano's theorem fails for infinite-dimensional Fréchet spaces.* Funct Anal its Appl. 1993, **27** (2) (149–151). DOI:10.1007/BF01085989 (translation of Funktsional'nyi Analiz i Ego Prilozheniya, 1993, **27**, (2), 90–92)(in Russian)

[10] Lobanov S. G., Smolyanov O. G. *Ordinary differential equations in locally convex spaces.* Russian Math. Surveys. 1994, **49** (3) (97–175). DOI:10.1070/RM1994v049n03ABEH002258 (in Russian)

[11] Slyusarchuk V. E. *Denseness of the set of unsolvable Cauchy problems in the set of all Cauchy problems in the case of an infinite-dimensional Banach space.* Nonlinear oscillations. 2002, **5** (1) (86–89). (in Russian)

[12] Kneser H. *Ueber die Lösungen eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen das der Lipschitzschen Begingung nicht genügt.* S.-B. Preuss. Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl. 1923, (171–174).

[13] Slyusarchuk V. Yu. *Cauchy problem with nonunique solutions.* Scientific Bulletin of the University of Chernivtsi. Maths 2011, **1** (4) (117–118). (in Ukrainian)

[14] Slyusarchuk V. Yu. *Denseness of the set of Cauchy problems with nonunique solutions in the set of all Cauchy problems.* Ukr. Math. J. 2012, **64** (7) (1144–1150). DOI:10.1007/s11253-012-0705-2 (translation of Ukr. Mat. Zh. 2012, **64** (7), 1000–1006.) (in Ukrainian)

[15] Demidovich B. P., Maron I. A., Shuvalova E. Z. Numerical methods of analisis. Nauka, Moscow, 1967. (in Russian)

Надійшло 17.10.2020

Slyusarchuk V.Yu. *Denseness of sets of Cauchy problems withhout solutions and with nonunique solutions in the set of all Cauchy problems*, Bukovinian Math. Journal. **8**, 2 (2020), 122–126.

When finding solutions of differential equations it is necessary to take into account the theorems on innovation and unity of solutions of equations. In case of non-fulfillment of the conditions of these theorems, the methods of finding solutions of the studied equations used in computational mathematics may give erroneous results. It should also be borne in mind that the Cauchy problem for differential equations may have no solutions or have an infinite number of solutions.

The author presents two statements obtained by the author about the denseness of sets of the Cauchy problem without solutions (in the case of infinite-dimensional Banach space) and with many solutions (in the case of an arbitrary Banach space) in the set of all Cauchy problems.

Using two examples of the Cauchy problem for differential equations, the imperfection of some methods of computational mathematics for finding solutions of the studied equations is shown.