Bukovinian Math. Journal. 2020, **8**, 2, 114–121 Буковинський матем. журнал 2020, Т.8, №2, 114–121

Ровенська О.Г.

НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ ІНТЕГРАЛІВ ПУАССОНА ПОВТОРНИМИ СУМАМИ ФЕЙЄРА

У роботі розглядаються питання наближення класів аналітичних періодичних функцій дійсної змінної середніми арифметичними сум Фур'є. Отримано асимптотичну рівність для верхніх граней відхилень повторних сум Фейєра на класах інтегралів Пуассона.

Ключові слова і фрази: суми Фейєра, середні арифметичні сум Фур'є, інтеграл Пуассона.

Donbass State Engineering Academy, Kramatorsk, Ukraine
e-mail: *rovenskaya.olga.math@gmail.com*

Вступ

Нехай $C_{2\pi}$ — клас неперервних 2π-періодичних функцій, $C^q_{\beta,\infty}$ — підмножина функцій $f \in C_{2\pi}$, які можна подати у вигляді згортки

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^q_\beta(x+t) P^q_\beta(t)\ dt,$$

де $P^q_\beta(t)$ — ядро Пуассона,

$$P^q_\beta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos(kt + \frac{\beta\pi}{2}), \quad q \in (0;1), \quad \beta \in \mathbb{R},$$

функція $f^q_\beta(x)$ майже скрізь на періоді задовольняє умові $|f^q_\beta(x)| \leq 1$. Множини $C^q_{\beta,\infty}$ складаються з 2π-періодичних функцій, що дозволяють аналітичне продовження до функцій $F(z) = F(x+iy)$ у відповідну смугу комплексної площини $|y| < \ln\frac{1}{q}$ і називаються класами інтегралів Пуассона.

Нехай

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

УДК 517.5
2010 *Mathematics Subject Classification:* 42A10.

— ряд Фур'є функції $f \in C_{2\pi}$, $a_k = a_k(f)$, $b_k = b_k(f)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ — коефіцієнти Фур'є функції f, $S_n(f; x)$ — частинні суми ряду Фур'є.

Найбільш простими й природними засобами наближення періодичних функцій є метод Фур'є, який полягає в наближенні частинними сумами ряду Фур'є $S_n(f; x)$; метод Фейєра $\sigma_n(f; x)$, що задається співвідношенням

$$\sigma_n(f; x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(f; x);$$

а також метод Валле Пуссена, який задається співвідношенням

$$V_{n,p}(f; x) = \frac{1}{p} \sum_{k=n-p}^{n-1} S_k(f; x)$$

і є певним узагальненням методу Фейєра за умови $p = n$.

Апроксимативні властивості лінійних методів підсумовування рядів Фур'є на класах інтегралів Пуасона вивчалися неодноразово. У 1946 році С.М. Нікольський [1] розглянув величину

$$\mathcal{E}_n(C^q_{\beta,\infty}; S_n) = \sup_{f \in C^q_{\beta,\infty}} \|f(x) - S_n(f; x)\|_C$$

і показав, що виконується рівність

$$\mathcal{E}_n(C^q_{\beta,\infty}; S_n) = \frac{8q^n}{\pi^2} K(q) + O(1) \frac{q^n}{n},$$

де

$$K(q) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1 - q^2 \sin^2 t}}, \quad q \in [0; 1)$$

— повний еліптичний інтеграл першого роду, $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена щодо n . У 1980 році С.Б. Стєчкін [2] цей результат довів іншим методом, який дозволив уточнити залишковий член.

Асимптотичну формулу для точних верхніх меж відхилень сум Валле Пуссена на класах $C^q_{\beta,\infty}$ при $n - p \to \infty$, $p \to \infty$ отримано в роботі В.І. Рукасова, С.О. Чайченка [3]

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\left(C^q_{\beta,\infty}; V_{n,p}\right) &= \sup_{f \in C^q_{\beta,\infty}} ||f(x) - V_{n,p}(f; x)||_C \\ &= \frac{4}{\pi(1 - q^2)} \frac{q^{n-p+1}}{p} + O(1) \left[\frac{q^n}{(1 - q^2)p} + \frac{q^{n-p+1}}{(1 - q)^3 (n - p)p}\right], \end{aligned}$$

де $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена щодо n, p, q.

А.С. Сердюком [4] було доведено більш загальну формулу

$$\mathcal{E}\left(C^q_{\beta,\infty}; V_{n,p}\right) = \frac{q^{n-p+1}}{p} \left(\frac{4}{\pi^2} K_{p,q} + O(1) \left(\frac{q}{(n - p + 1)(1 - q)^s}\right)\right),$$

де

$$K_{p,q}=\int\limits_{0}^{\pi}\frac{\sqrt{1-2q^p\cos pt+q^{2p}}}{1-2q\cos pt+q^2}dt,\quad s=s(p)=\begin{cases}1, & p=1,\\ 3, & p=2,3,\ldots,\end{cases}$$

$O(1)$ — величина, рівномірно обмежена щодо n, p, q. Для довільного $p=1,2,...,n$ поведінка величини $K_{p,q}$ визначається таким співвідношенням, знайденим в [5]:

$$K_{p,q}=2\frac{1-q^{2p}}{1-q^2}K(q^p).$$

У роботах [6, 7] отримано асимптотичну формулу для точних верхніх меж відхилень сум Фейєра на класах $C^q_{\beta,\infty}$ у випадку $q\in(0;q_0]$, $q_0=\sqrt{2+\sqrt{5}-2\sqrt{2+\sqrt{5}}}\approx 0,346$ і $\beta=0$

$$\mathcal{E}\left(C^q_{\beta,\infty};\sigma_n\right)=\sup_{f\in C^q_{0,\infty}}||f(x)-\sigma_n(f;x)||_C=\frac{4q}{\pi n(1+q^2)}+O(1)\frac{q^n}{n},$$

де $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена щодо n.

Нехай p_1, $p_2\in\mathbb{N}$, $p_1+p_2<n+2$. Тригонометричні поліноми $V_{n,p_1,p_2}(f;x)$, що породжуються дворазовим застосуванням методу підсумовування Валле Пуссена

$$\begin{aligned}V_{n,p_1,p_2}(f;x)=V^{(2)}_{n,\overline{p}}(f;x)&=\frac{1}{p_1}\sum_{k=n-p_1}^{n-1}V_{k+1,p_2}(f;x)\\&=\frac{1}{p_1}\sum_{k=n-p_1}^{n-1}\frac{1}{p_2}\sum_{m=k-p_2+1}^{k}S_m(f;x),\end{aligned}$$

являють собою подальше узагальнення класичних методів Фур'є, Валле Пуссена та Фейєра. При певному виборі параметрів p_1 та p_2 ці поліноми збігаються з сумами $S_n(f;x)$, $V_{n,p}(f;x)$ і $\sigma_n(f;x)$. Продовженням вивчення апроксимативних властивостей лінійних середніх сум Фур'є на класах інтегралів Пуассона є роботи [8, 9] і [10, 11, 12], в яких отримано асимптотичні формули для точних верхніх меж відхилень на класах $C^q_{\beta,\infty}$ повторних сум Валле Пуссена $V^{(2)}_{n,\overline{p}}(f;x)$ та r-повторних сум Валле Пуссена $V^{(r)}_{n,\overline{p}}(f;x)$, $r\geq 2$ відповідно.

За умови $p_1+p_2=n+1$ маємо

$$V^{(2)}_{n,\overline{p}}(f;x)=\frac{1}{p_1}\sum_{k=n-p_1}^{n-1}\frac{1}{n-p_1+1}\sum_{m=k-n+p_1}^{k}S_m(f;x).$$

У цьому випадку індекс m величини $S_m(f;x)$ змінюється від 0 до $n-1$, тому такі суми природно назвати повторними сумами Фейєра і позначати $\sigma^{(2)}_{n,\overline{p}}(f;x)$ [13].

1 Результат

У роботі отримано асимптотичну рівність для величин

$$\mathcal{E}\left(C^q_{0,\infty};\sigma^{(2)}_{n,\overline{p}}\right)=\sup_{f\in C^q_{0,\infty}}||f(x)-\sigma^{(2)}_{n,\overline{p}}(f;x)||_C.$$

Має місце таке твердження.

Теорема. *Для* $q \in (0; q_0]$, $n \to \infty$ *виконується асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}(C^q_{0,\infty}; \sigma^{(2)}_{n,\overline{p}}) = \frac{4q}{(1+q^2)^2 \pi p_1 p_2} + O(1) \frac{q^{n-p_1} + q^{n-p_2}}{p_1 p_2}, \qquad (1)$$

де q_0 *— розв'язок рівняння*

$$-2q^6 - 3q^5 - 3q^4 + 6q^2 + 8q^3 + 3q - 1 = 0,$$

який належить інтервалу $(0; 1)$, $O(1)$ *— величина, рівномірно обмежена щодо* p_1, p_2.

Доведення. У роботах [10, 11] показано, що для величин

$$\delta^{(r)}_{n,\overline{p}}(f; x) = f(x) - V^{(r)}_{n,\overline{p}}(f; x)$$

для $r \in \mathbb{N}$ має місце співвідношення

$$\delta^{(r)}_{n,\overline{p}}(f; x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^q_\beta(x+t) \left(\sigma^{(r)}_1 \cos \frac{\beta\pi}{2} - \sigma^{(r)}_2 \sin \frac{\beta\pi}{2} \right) dt, \qquad (2)$$

де

$$\sigma^{(r)}_1 = \frac{Z^{2(r+1)}_q(t)}{\prod_{i=1}^r p_i} \sum_{\alpha \subset \overline{r}} (-1)^{(r-|\alpha|)} \sum_{\nu=0}^{r+1} (-1)^\nu C^\nu_{r+1} q^{n-\Sigma^\alpha_p + r + \nu} \cos(n - \Sigma^\alpha_p + r - \nu)t,$$

$$\sigma^{(r)}_2 = \frac{Z^{2(r+1)}_q(t)}{\prod_{i=1}^r p_i} \sum_{\alpha \subset \overline{r}} (-1)^{(r-|\alpha|)} \sum_{\nu=0}^{r+1} (-1)^\nu C^\nu_{r+1} q^{n-\Sigma^\alpha_p + r + \nu} \sin(n - \Sigma^\alpha_p + r - \nu)t,$$

$|\alpha|$ — кількість елементів множини α, $\Sigma^\alpha_p = \sum\limits_{j \in \alpha} p_j$,

$$Z_q(x) = \sqrt{1 - 2q\cos x + q^2}.$$

Оскільки

$$\int \frac{dt}{(1+q^2-2q\cos t)^3} = \frac{O(1)}{(1-q)^5},$$

то, на підставі (2), для $r = 2$, $\beta = 0$, $p_1 + p_2 = n + 1$ отримаємо

$$\delta^{(2)}_{n,\overline{p}}(f; x) = \frac{q}{\pi p_1 p_2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{f^q_\beta(x+t)[-3q + (1+3q^2)\cos t - q^3 \cos 2t]}{(1-2q\cos t + q^2)^3} dt + O(1) \frac{q^{n-p_1} + q^{n-p_2}}{p_1 p_2 (1-q)^5},$$

де $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена щодо q, p_1, p_2.

Зауважимо, що для $f(x) \in C^q_{\beta,\infty}$ для будь-якої сталої I мають місце такі співвідношення

$$\delta_{n,\overline{p}}(f; x) = \frac{q}{\pi p_1 p_2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^q_\beta(x+t) \left(\frac{-3q + (1+3q^2)\cos t - q^3 \cos 2t}{(1-2q\cos t + q^2)^3} + I \right) dt + O(1) \frac{q^{n-p_1} + q^{n-p_2}}{p_1 p_2 (1-q)^5}$$

і

$$\mathcal{E}(C^q_{0,\infty};\sigma^{(2)}_{n,\bar{p}}) \leq \frac{q}{\pi p_1 p_2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{-3q+(1+3q^2)\cos t - q^3\cos 2t}{(1-2q\cos t+q^2)^3}+I\right|dt + O(1)\frac{q^{n-p_1}+q^{n-p_2}}{p_1p_2(1-q)^5}. \quad (3)$$

Покажемо, що існує q_0 і така стала I_q, що

$$mes(I_q + \frac{-3q+(1+3q^2)\cos t - q^3\cos 2t}{(1-2q\cos t+q^2)^3} \geq 0)$$
$$= mes(I_q + \frac{-3q+(1+3q^2)\cos t - q^3\cos 2t}{(1-2q\cos t+q^2)^3} \leq 0)$$

для будь-якого $q \in (0; q_0]$.

Розглянемо функцію

$$\Gamma(t) = \frac{-3q+(1+3q^2)\cos t - q^3\cos 2t}{(1-2q\cos t+q^2)^3}.$$

Виконуючи елементарні перетвореня, дістанемо, що на проміжку $(0;\pi)$ єдиний нуль функції $\Gamma(t)$ визначається співвідношенням

$$t_0 = \arccos\frac{(1+3q^2)-(1-q^2)\sqrt{8q^2+1}}{4q^3}.$$

Враховуючи, що $\Gamma(0) > 0$, $\Gamma(\pi/2) < 0$ для будь-якого $q \in (0;1)$, робимо висновок, що $t_0 \in (0;\pi/2)$.

Вивчимо характер монотонності функції $\Gamma(t)$. Маємо

$$\Gamma'(t) = \frac{(-(1+3q^2)\sin t + 2q^3\sin 2t)(1-2q\cos t+q^2)}{(1-2q\cos t+q^2)^4}$$
$$- \frac{(-3q+(1+3q^2)\cos t - q^3\cos 2t)6q\sin t}{(1-2q\cos t+q^2)^4}$$
$$= \frac{\sin t[(4q^4\cos^2 t - 4q[1+2q^2-q^4]\cos t + (-1+14q^2-9q^4)]}{(1-2q\cos t+q^2)^4}.$$

Оскільки $\Gamma'(t) = 0$ за умови

$$\cos t_{1,2} = \frac{[1+2q^2-q^4] \pm (1-q^2)\sqrt{q^4+7q^2+1}}{2q^3},$$

то функція $\Gamma(t)$ не може мати більше ніж одного екстремуму на проміжку $(0;\pi)$.

Відтак розглянемо різницю $\Gamma(\pi) - \Gamma(\pi/2)$. Маємо

$$\Gamma(\pi) - \Gamma(\pi/2) = \frac{-2q^6-3q^5-3q^4+6q^2+8q^3+3q-1}{(1+q)^3(1+q^2)^3}.$$

Позначивши через $q_0 \in (0;1)$ розв'язок рівняння

$$-2q^6-3q^5-3q^4+6q^2+8q^3+3q-1 = 0,$$

маємо, що для $q \in (0; q_0)$ має місце $\zeta(\pi) < \zeta(\pi/2)$, і крім цього, для $t \in (0; \pi/2)$ виконується $\Gamma(t) - \Gamma(\pi/2) > 0$, а для $t \in (\pi/2; \pi)$ — $\Gamma(t) - \Gamma(\pi/2) < 0$. Отже, для $q \in (0; q_0]$ функція $\Gamma(t) - \Gamma(\pi/2)$ така, що

$$\operatorname{sign}(\Gamma(t) - \Gamma(\pi/2)) = \begin{cases} 1, & t \in (-\pi/2; \pi/2), \\ -1, & t \in (-\pi; -\pi/2) \cup (\pi/2; \pi). \end{cases}$$

Позначимо через $f^q_\beta(t)$ функцію, яка на періоді співпадає з функцією $\operatorname{sign}(\Gamma(t) - \Gamma(\pi/2))$, $q \in (0; q_0]$, а через $f_0(x)$ — функцію, яка є згорткою функції $f^q_\beta(t)$ з відповідним ядром $P^q_\beta(t)$. Враховуючи, що

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^q_\beta(t)dt = 0, \quad \operatorname{essup}|f^q_\beta(t)| \leq 1,$$

маємо, що знайдена функція $f_0(x) \in C^q_{\beta,\infty}$ для $q \in (0; q_0]$ забезпечує виконання нерівності

$$\mathcal{E}(C^q_{0,\infty}; \sigma^{(2)}_{n,\bar{p}}) \geq \frac{q}{\pi p_1 p_2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{-3q + (1+3q^2)\cos t - q^3 \cos 2t}{(1 - 2q\cos t + q^2)^3} + \frac{3q - q^3}{(1+q^2)^3} \right| dt + O(1)\frac{q^{n-p_1} + q^{n-p_2}}{p_1 p_2}. \tag{4}$$

Поєднуючі (3) і (4) отримаємо, що для $q \in (0; q_0]$ має місце співвідношення

$$\mathcal{E}(C^q_{0,\infty}; \sigma^{(2)}_{n,\bar{p}}) = \frac{q}{\pi p_1 p_2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{-3q + (1+3q^2)\cos t - q^3 \cos 2t}{(1 - 2q\cos t + q^2)^3} + \frac{3q - q^3}{(1+q^2)^3} \right| dt + O(1)\frac{q^{n-p_1} + q^{n-p_2}}{p_1 p_2}. \tag{5}$$

Обчислимо визначений інтеграл у рівності (5). Маємо

$$\int\limits_{0}^{\pi} \left| \frac{-3q + (1+3q^2)\cos t - q^3 \cos 2t}{(1 - 2q\cos t + q^2)^3} + \frac{3q - q^3}{(1+q^2)^3} \right| dt$$
$$= \int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{-3q + (1+3q^2)\cos t - q^3 \cos 2t}{(1 - 2q\cos t + q^2)^3} dt - \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{-3q + (1+3q^2)\cos t - q^3 \cos 2t}{(1 - 2q\cos t + q^2)^3} dt. \tag{6}$$

Виконуючи інтегрування, маємо

$$\int \frac{-3q + (1+3q^2)\cos t - q^3 \cos 2t}{(1 - 2q\cos t + q^2)^3} dt = \frac{-q/2 \sin 2t + \sin t}{(1 - 2q\cos t + q^2)^2} + C.$$

Отже,

$$\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{-3q + (1+3q^2)\cos t - q^3 \cos 2t}{(1 - 2q\cos t + q^2)^3} dt - \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{-3q + (1+3q^2)\cos t - q^3 \cos 2t}{(1 - 2q\cos t + q^2)^3} dt$$
$$= \left. \frac{-q/2 \sin 2t + \sin t}{(1 - 2q\cos t + q^2)^2} \right|_0^{\pi/2} - \left. \frac{-q/2 \sin 2t + \sin t}{(1 - 2q\cos t + q^2)^2} \right|_{\pi/2}^{\pi} = \frac{2}{(1+q^2)^2}. \tag{7}$$

Поєднуючи (5)–(7), отримаємо асимптотичну рівність (1).

□

Список літератури

[1] Nikolskiy S.M. *Approximation of the functions by trigonometric polynomials in the mean.* Izvestiya Akademii Nauk, Seriya Matematicheskaya, 1946, **10** (3), P. 207–256. (in Russian)

[2] Stechkin S.B. *Estimation of the remainder of Fourier series for the differentiable functions* Trudy Matematicheskogo Instituta imeni V.A. Steklova, 1980, **145**, P. 126–151. (in Russian)

[3] Rukasov V.I., Chaichenko, S.O. *Approximation of the classes of analytical functions by de la Vallee-Poussin sums.* Ukrainian Mathematical Journal, 2002, **54**, P. 2006–2024. doi:10.1023/A:1024077332287.

[4] Serdyuk A.S. *Approximation of Poisson integrals by de la Vallee Poussin sums.* Ukrainian Mathematical Journal, 2004, **56**, P. 122–134. doi:10.1023/B:UKMA.0000031707.50226.b9.

[5] Savchuk V.V., Savchuk M.V., Chaichenko S.O. *Approximation of analytic functions by de la Vallee Poussin sums.* Matematychni Studii, 2010, **34** (2), P. 207–219. (in Ukrainian)

[6] Novikov O.O., Rovenska O.G. *Approximation of periodic analytic functions by Fejer sums.* Matematychni Studii, 2017, **47**, P. 196–201. doi:10.15330/ms.47.2.196-201.

[7] Novikov, O., Rovenska, O., Kozachenko, Y. *Approximation of classes of Poisson integrals by Fejer sums* Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics, 2018, **87**, P. 4–12. doi: 10.26565/2221-5646-2018-87-01.

[8] Rovenska O.O., Novikov O.O. *Approximation of Poisson integrals by repeated de la Vallee Poussin sums.* Nonlinear Oscillations, 2010, **13**, P. 108–111. doi:10.1007/s11072-010-0103-3.

[9] Novikov O.O., Rovenska O.G. *Approximation of analytic periodic functions by repeated de la Vallee Poussin sums.* Bukovinian Mathematical Journal, 2017, **5**, (3–4) P. 137–143. (in Ukrainian)

[10] Novikov O.O., Rovenska O.G. *Approximation of classes of Poisson integrals by r-repeated de la Vallee Poussin sums.* Odesa National University Herald. Mathematics and Mechanics, 2014, **19**, (23), P. 14–26. (in Russian)

[11] Novikov, O., Rovenska, O., Kozachenko, Y. *Approximation of classes of Poisson integrals by linear methods* Proceedings of IAMM of NASU, 2017, **31**, P. 92–108. (in Rusian)

[12] Novikov O., Rovenska O. Approximation of Classes of Poisson Integrals by Repeated Fejer Sums // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2017. —**38**. — P. 502-–509. doi:10.1134/S1995080217030209.

[13] Novikov O.O., Rovenska O.G. *Approximation of classes of Poisson integrals by repeated Fejer sums.* Proceedings of IAMM of NASU, 2015, **29**, P. 78–86. (in Rusian)

Надійшло 05.11.2020

Rovenska O.G. *Approximation of classes of Poisson integrals by repeated Fejer sums*, Bukovinian Math. Journal. **8**, 2 (2020), 114–121.

The paper is devoted to the approximation by arithmetic means of Fourier sums of classes of periodic functions of high smoothness. The simplest example of a linear approximation of continuous periodic functions of a real variable is the approximation by partial sums of the Fourier series. The sequences of partial Fourier sums are not uniformly convergent over the class of continuous periodic functions. A significant number of works is devoted to the study of other

approximation methods, which are generated by transformations of Fourier sums and allow us to construct trigonometrical polynomials that would be uniformly convergent for each continuous function. Over the past decades, Fejer sums and de la Vallee Poussin sums have been widely studied. One of the most important direction in this field is the study of the asymptotic behavior of upper bounds of deviations of linear means of Fourier sums on different classes of periodic functions. Methods of investigation of integral representations of deviations of trigonometric polynomials generated by linear methods of summation of Fourier series, were originated and developed in the works of S.M. Nikolsky, S.B. Stechkin, N.P. Korneichuk, V.K. Dzadyk and others.

The aim of the work systematizes known results related to the approximation of classes of Poisson integrals by arithmetic means of Fourier sums, and presents new facts obtained for particular cases. In the paper is studied the approximative properties of repeated Fejer sums on the classes of periodic analytic functions of real variable. Under certain conditions, we obtained asymptotic formulas for upper bounds of deviations of repeated Fejer sums on classes of Poisson integrals. The obtained formulas provide a solution of the corresponding Kolmogorov-Nikolsky problem without any additional conditions.