

©2014 р. В.В. Городецький, Я.М. Дрінь

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
Буковинський державний фінансово-економічний університет**НЕЛОКАЛЬНА БАГАТОТОЧКОВА ЗА ЧАСОМ ЗАДАЧА ДЛЯ
ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ З ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМИ
ОПЕРАТОРАМИ В ПРОСТОРАХ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ**

Встановлена коректна розв'язність нелокальної багатоточкової за часом задачі для еволюційних псевдодиференціальних рівнянь з граничною умовою у просторі періодичних узагальнених функцій типу ультрарозподілів.

We prove the well-posedness of a non-local multipoint with respect to time problem for evolution pseudo-differential equations with a boundary condition in spaces of periodic generalized functions of an ultra-distribution type.

Теорія нелокальних крайових задач як розділ загальної теорії крайових задач для рівнянь з частинними похідними інтенсивно розвивається з сімдесятих років минулого століття. Дослідження таких задач зумовлене багатьма застосуваннями у механіці, фізиці, хімії, біології, екології та інших природничо-наукових дисциплінах, які виникають при математичному моделюванні тих чи інших процесів [1–4]. На доцільність використання нелокальних умов з точки зору загальної теорії крайових задач вперше вказав О.О. Дезін [5], який досліджував розв'язні розширення диференціальних операторів, породжених загальною диференціальною операцією зі сталими коефіцієнтами. Він показав, що для постановки коректної крайової задачі необхідно використовувати поруч з локальними і нелокальні умови. А.Х. Мамян встановив [6], що існують такі рівняння з частинними похідними в шарі, для яких неможливо сформулювати жодної коректної локальної задачі; водночас коректні задачі існують, якщо залучити нелокальні умови.

Нелокальні крайові задачі у різних аспектах вивчали багато математиків, використовуючи при цьому різні методи й підходи (О.О. Дезін, В.К. Романко, А.М. Нахушев, О.А. Самарський, Б.Й. Пташник, М.І. Юрійчук, В.І. Чесалін, М.І. Матійчук, О.Л. Скубачевський та ін.). Одержані важли-

ві результати щодо постановки, коректної розв'язності та побудови розв'язків, досліджені питання залежності характеру розв'язності задач від поведінки символів операцій, сформульовані умови регулярності та нерегулярності крайових умов для важливих випадків диференціально-операторних рівнянь. До таких задач відноситься і нелокальна багатоточкова за часом задача, яка є узагальненням задачі Коші, коли початкова умова $u(t, \cdot)|_{t=0} = f$ замінюється умовою $\sum_{k=0}^m \alpha_k u(t, \cdot)|_{t=t_k} = f$, де $t_0 = 0$, $\{t_1, \dots, t_m\} \subset (0, T]$, $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\} \subset \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, – фіксовані числа (якщо $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$, то маємо, очевидно, задачу Коші).

Основною метою роботи є побудова та дослідження властивостей фундаментального розв'язку m -точкової ($m \geq 1$) за часом задачі для еволюційних рівнянь з псевдодиференціальними операторами, які діють у просторах періодичних функцій, встановлення коректної розв'язності задачі у випадку, коли гранична функція є періодичним ультрарозподілом, який [7] отожднюється з певним формальним тригонометричним рядом. Зазначимо, що така постановка задачі є природною, оскільки гранична функція може мати особливість в одній або декількох точках і допускає регуляризацію у тому чи іншому просторі узагальнених періодичних

функцій типу розподілів, ультрарозподілів, гіперфункцій тощо. Досліджена також властивість локалізації розв'язку (властивість локального покращення збіжності), яка полягає в тому, що якщо гранична узагальнена функція збігається на деякій відкритій множині Q з неперервною функцією, то розв'язок $u(t, x)$ задачі задовольняє відповідну граничну умову рівномірно відносно $x \in \mathbb{K} \subset Q$, де $\mathbb{K}$ – довільно фіксований компакт.

1. Нехай

$$T_m = \left\{ P(x) : P(x) = \sum_{k=-m}^m c_{k,p} e^{ikx}, \right.$$

$$\left. x \in \mathbb{R}, c_{k,p} \in \mathbb{C} \right\}, m \in \mathbb{Z}_+, T = \lim_{m \rightarrow +\infty} \text{ind} T_m,$$

T' – простір всіх лінійних неперервних функціоналів на T зі слабкою збіжністю. Елементи простору T' назвемо 2π -періодичними узагальненими функціями.

Зіставлення

$$T \ni P \rightarrow f_p \in T' : \langle f_p, Q \rangle = (P, Q)_{L_2[0, 2\pi]},$$

$$\forall Q \in T$$

задає вкладення $T \subset L_2[0, 2\pi] \subset T'$ (тут $\langle f, Q \rangle$ позначає дію функціоналу f на поліном $Q \in T$), причому ці вкладення щільні й неперервні [7].

Символом s позначимо простір всіх числових послідовностей $\{c_k, k \in \mathbb{Z}\}$ комплексних чисел з покоординатною збіжністю. Ізоморфізм

$$F : T' \ni f \rightarrow \{c_k(f) = \langle f, e^{-ikx} \rangle, k \in \mathbb{Z}\} \subset s$$

відображає T на множину фінітних послідовностей з s , а $L_2[0, 2\pi]$ – на l_2 .

Ряд $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) e^{ikx}$, де $c_k(f) = \langle f, e^{-ikx} \rangle$, називається рядом Фур'є узагальненої 2π -періодичної функції $f \in T'$, а числа $c_k(f)$ – її коефіцієнтами Фур'є. Для довільної узагальненої 2π -періодичної функції $f \in T'$ її ряд Фур'є збігається до f у просторі T' [7]. Навпаки, довільний ряд $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$ збігається в T' до деякого елемента $f \in T'$ і цей ряд є

рядом Фур'є для f [7]. Отже, T' можна розуміти як простір формальних тригонометричних рядів вигляду $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$.

2. Розглянемо послідовність $\{m_k, k \in \mathbb{Z}\}$, $m_0 = 1$, додатних чисел, яка володіє властивостями [8]:

- 1) $\forall k \in \mathbb{Z}_+ : m_k \leq m_{k+1}$;
- 2) $\forall \alpha > 0 \exists c_\alpha > 0 \forall k \in \mathbb{Z}_+ : m_k \geq c_\alpha \alpha^k$;
- 3) $\exists M > 0 \exists h > 0 \forall k \in \mathbb{Z}_+ : m_{k+1} \leq M h^k m_k$;
- 4) $\exists A > 0 \exists L > 0 \forall \{k, l\} \subset \mathbb{Z}_+ : m_k \cdot m_l \leq A L^{k+l} m_{k+l}$;
- 5) $\exists B > 0 \exists s > 0 \forall k \in \mathbb{Z}_+ : m_k \leq B s^k \min_{0 \leq l \leq k} m_{k-l} m_l$.

Прикладами таких послідовностей є послідовності Жевре вигляду $m_k = (k!)^\beta$, $m_k = k^{k\beta}$, $\beta > 0$.

Символом $H\langle m_k \rangle$ позначимо сукупність всіх 2π -періодичних і нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій φ , які володіють властивістю: існують сталі $c, B > 0$ (залежні лише від функції φ) такі, що

$$|\varphi^{(k)}(x)| \leq C B^k m_k, \quad k \in \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Множина функцій $\varphi \in H\langle m_k \rangle$, для яких оцінки (1) виконуються з фіксованою сталою $B > 0$, утворює банахів простір $H_B\langle m_k \rangle$ відносно норми

$$\|\varphi\|_B = \sup_{\substack{x \in [0, 2\pi] \\ k \in \mathbb{Z}_+}} \frac{|\varphi^{(k)}(x)|}{B^k m_k}.$$

При цьому $H_{B_1}\langle m_k \rangle \subset H_{B_2}\langle m_k \rangle$, якщо $B_1 < B_2$ і $H\langle m_k \rangle = \bigcup_{B>0} H_B\langle m_k \rangle$. В $H\langle m_k \rangle$ вводиться топологія індуктивної границі банахових просторів $H_B\langle m_k \rangle$ [8]. При цьому $H\langle m_k \rangle$ перетворюється в повний локально опуклий простір, інваріантний відносно операцій диференціювання, множення та згортки, які є неперервними в $H\langle m_k \rangle$ (див. властивості 3) – 5)).

Якщо послідовність $\{m_k, k \in \mathbb{Z}\}$ збігається з однією із послідовностей Жевре, то $H\langle m_k \rangle = G_{\{\beta\}}$, де $G_{\{\beta\}}$ – простір ультрадиференційовних функцій класу Жевре порядку $\beta > 0$. Простір $H\langle k! \rangle = H\langle k^k \rangle = G_{\{1\}}$ складають аналітичні 2π -періодичні функції [8].

Символом $H'\langle m_k \rangle$ позначатимемо простір всіх лінійних неперервних функціоналів на $H\langle m_k \rangle$ зі слабкою збіжністю. Відомо [8], що $H'\langle m_k \rangle$ збігається з проективною границею банахових просторів $H'_B\langle m_k \rangle$. Елементи простору $H'\langle m_k \rangle$ називаються ультрарозподілами класу $\{m_k\}$. Елементи простору $H'\langle k! \rangle$ називаються гіперфункціями або аналітичними періодичними функціоналами.

У праці [8] дається характеристика просторів $H\langle m_k \rangle$ та $H'\langle m_k \rangle$ з точки зору поведінки коефіцієнтів Фур'є їхніх елементів.

Покладемо $\rho(\lambda) = \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} (\lambda^k / m_k)$, $\lambda \in [1, +\infty)$. Із властивостей послідовності $\{m_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ випливає, що функція ρ неперервна, монотонно зростає на $[1, +\infty)$ (швидше, ніж λ^k , $\forall k \in \mathbb{N}$, $\rho(\lambda) \geq 1$, $\forall \lambda \in [1, +\infty)$). Нехай

$$H_{\{\alpha\}} := \left\{ f \in T' \mid \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k(f)|^2 \rho^2\left(\frac{|k|}{\alpha}\right) < \infty, \right.$$

$$\left. c_k(f) = \langle f, e^{-ikx} \rangle \right\}, \alpha > 0.$$

$H_{\{\alpha\}}$ – гільбертів простір зі скалярним добутком

$$(f, g)_{H_{\{\alpha\}}} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) \overline{c_k(g)} \rho^2\left(\frac{|k|}{\alpha}\right),$$

$$\{f, g\} \subset H_{\{\alpha\}}.$$

Якщо $\alpha_1 > \alpha_2$, то $H_{\{\alpha_1\}} \supset H_{\{\alpha_2\}}$ і це вкладення є неперервним внаслідок монотонності функції ρ . Покладемо $H_{\{m_k\}} = \bigcup_{\alpha > 0} H_{\{\alpha\}}$.

В $H\{m_k\}$ вводиться топологія індуктивної границі [8]: $H\{m_k\} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \text{ind} H_{\{\alpha\}}$. Простори $H\langle m_k \rangle$ та $H\{m_k\}$ збігаються не лише як множини, але і топологічно [8].

З точки зору поведінки коефіцієнтів Фур'є їхніх елементів простори $H\langle m_n \rangle$ та $H'\langle m_n \rangle$ описуються так [8]:

$$(f \in H\langle m_n \rangle) \Leftrightarrow (\exists \mu > 0 \exists c > 0 \forall k \in \mathbb{Z} :$$

$$|c_k(f)| \leq c \rho^{-1}(\mu |k|)); \quad (A)$$

$$(f \in H'\langle m_n \rangle) \Leftrightarrow (\forall \mu > 0 \exists c = c(\mu) > 0$$

$$\forall k \in \mathbb{Z} : |c_k(f)| \leq c \rho(\mu |k|)). \quad (B)$$

Якщо $m_k = k^{k\beta}$, $\beta > 0$, то $\rho(\lambda) \sim \exp(\lambda^{1/\beta})$, тобто в цьому випадку для $f \in T'$ правильними є такі співвідношення еквівалентності:

$$(f \in G_{\{\beta\}}) \Leftrightarrow (\exists \mu > 0 \exists c > 0 \forall k \in \mathbb{Z} :$$

$$|c_k(f)| \leq c \exp\{-\mu |k|^{1/\beta}\});$$

$$(f \in G'_{\{\beta\}}) \Leftrightarrow (\forall \mu > 0 \exists c = c(\mu) > 0 \forall k \in \mathbb{Z} :$$

$$|c_k(f)| \leq c \exp\{\mu |k|^{1/\beta}\}).$$

Припустимо, що послідовність $\{m_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ задовольняє ще одну умову: 6) $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{m_k}/k = 0$, тобто (див. [9])

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \forall \lambda :$$

$$\lambda \geq \max\{1, \delta\} \Rightarrow \rho(\lambda) \geq e^{\varepsilon \lambda}. \quad (2)$$

Звідси випливає (див. [10]), що функція $\ln \rho$ – опукла на $[1, +\infty)$, тобто

$$\forall \{x_1, x_2\} \subset [1, +\infty) :$$

$$\ln \rho(x_1) + \ln \rho(x_2) \leq \ln \rho(x_1 + x_2) \quad (3)$$

((3) відповідає означенню опуклої функції f з [11]:

$$f(x_1) + f(x_2) \leq f(x_1 + x_2), \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0).$$

Покладемо $\rho_k := \inf_{\lambda \geq 1} \rho(\lambda)/\lambda^k$, $k \in \mathbb{N}$. Із результатів, отриманих в [10] випливає, що послідовність $\{\rho_k\}$ є монотонно спадною і такою, що $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\rho_k} = 0$. Розглянемо тепер послідовність спеціального вигляду, а саме, $m_k = k! \rho_k$, $k \in \mathbb{Z}_+$ (ця послідовність задовольняє умови 1) – 6)). Виявляється, що елементами відповідного класу $H\langle k! \rho_k \rangle$ є аналітичні (цілі) періодичні функції, які як функції комплексної змінної задовольняють певну умову.

Теорема 1. *Нескінченно диференційовна 2π -періодична функція φ належить до класу $H\langle k! \rho_k \rangle$ тоді й лише тоді, коли вона аналітично продовжується в комплексну площину до цілої функції $\varphi(z)$, $z \in \mathbb{C}$, і це продовження задовольняє умову: існують сталі $c, b > 0$ (залежні, можливо, лише від φ) такі, що*

$$|\varphi(x + iy)| \leq c \tilde{\rho}(by), \quad \forall \{x, y\} \subset \mathbb{R}, \quad (4)$$

$$\tilde{\rho}(y) = \begin{cases} 1, & |y| < 1, \\ \rho(y), & |y| \geq 1, \end{cases}$$

$$\rho(y) = \sup_{|y| \geq 1} |y|^k / (k! \rho_k).$$

Доведення. Нехай φ допускає аналітичне продовження в комплексну площину до цілої функції і виконується умова (4). Згідно з інтегральною формулою Коші

$$\varphi^{(k)}(x) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{\varphi(z)}{(z-x)^{k+1}} dz, \quad x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}_+,$$

де γ_R – коло радіуса R з центром у точці x . Тоді

$$|\varphi^{(k)}(x)| \leq \frac{k!}{2\pi} \max_{z \in \gamma_R} \frac{|\varphi(z)|}{|z-x|^{k+1}} \oint_{\gamma_R} ds \leq$$

$$\leq ck!b^k \inf_R \frac{\tilde{\rho}(bR)}{(bR)^k} = cb^k k! \rho_k, k \in \mathbb{Z}_+.$$

Звідси випливає, що $\varphi \in H\langle k! \rho_k \rangle$.

Навпаки, нехай нескінченно диференційовна 2π -періодична функція φ належить до класу $H\langle k! \rho_k \rangle$, тобто існують сталі $c' > 0$, $B > 0$ такі, що

$$|\varphi^{(k)}(x)| \leq c' B^k k! \rho_k, \quad k \in \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R}.$$

Тоді її можна аналітично продовжити у всю комплексну площину. Справді, залишковий член у формулі Тейлора

$$\varphi(x+h) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(k)}(x)}{k!} h^k + \frac{\varphi^{(n)}(\xi)}{n!} h^n,$$

$x \in \mathbb{R}$, де $|\xi - x| < |h|$, допускає оцінку

$$\frac{|\varphi^{(n)}(\xi)|}{n!} |h|^n \leq c' B^n \rho_n |h|^n = c' (B|h| \sqrt[n]{\rho_n})^n. \quad (5)$$

Оскільки $\sqrt[n]{\rho_n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \forall n \geq n_0 : \rho_n < \varepsilon^n.$$

Покладемо $\varepsilon = \frac{1}{2} (B|h|)^{-1}$. Тоді

$$\frac{|\varphi^{(n)}(\xi)|}{n!} \leq \frac{c'}{2^n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

звідки й випливає, що ряд Тейлора функції $\varphi(x)$ збігається до $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, тобто

$$\varphi(x+h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(k)}(x)}{k!} h^k.$$

Із оцінки (5) випливає також, що ряд Тейлора функції φ залишається збіжним і для комплексних значень h . Отже, φ продовжується до цілої функції $\varphi(z)$, $z = x + iy \in \mathbb{C}$; при цьому

$$\varphi(x+iy) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(k)}(x)}{k!} (iy)^k$$

і

$$|\varphi(x+iy)| \leq c' \sum_{k=0}^{\infty} B^k |y|^k \rho_k.$$

Оскільки знайдеться стала $d_0 > 0$ така, що $\tilde{\rho}(y) \leq d_0 \tilde{\rho}(2By)$, то

$$B^k |y|^k \rho_k = |y|^k B^k \inf_{y \neq 0} \frac{\tilde{\rho}(y)}{|y|^k} \leq$$

$$\leq d_0 |y|^k B^k \inf_{y \neq 0} \frac{\tilde{\rho}(2By)}{|2By|^k} \leq d_0 |y|^k B^k \frac{\tilde{\rho}(2By)}{2^k B^k |y|^k} =$$

$$= \frac{d_0}{2^k} \tilde{\rho}(by), b = 2B, y \neq 0.$$

Тоді

$$|\varphi(x+iy)| \leq c' \tilde{\rho}(by) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = c \tilde{\rho}(by), \quad y \neq 0,$$

де $c = 2c'$. Зазначимо, що для $y = 0$ ця нерівність є очевидною. Теорема доведена.

Зауваження 1. Якщо $m_k = k^{k(1-\beta)}$, $0 < \beta < 1$, то $\rho(y) \sim \exp(|y|^{1/(1-\beta)})$ і в цьому випадку $\rho_k \sim k^{-k(1-\beta)}$. Тоді $k! \rho_k \sim k^{k\beta}$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Отже, з теореми 1 випливає, що клас Жевре $H\langle k^{k\beta} \rangle = G_{\{\beta\}}$, $0 < \beta < 1$, характеризується так.: для того, щоб нескінченно диференційовна 2π -періодична функція φ належала до класу $G_{\{\beta\}}$, $0 < \beta < 1$, необхідно й достатньо, щоб вона аналітично продовжувалася в комплексну площину до цілої функції і це продовження задовольняло умову:

$$\exists c > 0 \exists b > 0 \forall z = x + iy \in \mathbb{C} :$$

$$|\varphi(x+iy)| \leq c \exp\{b|y|^{1/(1-\beta)}\}.$$

3. У просторі $H'\langle m_k \rangle$ згортка $f_1 * f_2$ визначена для довільних $\{f_1, f_2\} \subset H'\langle m_k \rangle$, причому $f_1 * f_2 \in H'\langle m_k \rangle$. Справді, оскільки $H'\langle m_k \rangle \subseteq T'$, то коефіцієнти Фур'є узагальненої функції $f_1 * f_2 \in T'$ пов'язані з коефіцієнтами Фур'є узагальнених функцій $\{f_1, f_2\} \subset H'\langle m_k \rangle \subseteq T'$ так [12]:

$$c_k(f_1 * f_2) = c_k(f_1) \cdot c_k(f_2), \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Доведемо, що коефіцієнти Фур'є $c_k(f_1 * f_2)$ задовольняють умову (B), звідки й випливатиме, що $f_1 * f_2 \in H'\langle m_k \rangle$.

Отже, якщо $\{f_1, f_2\} \subset H'\langle m_k \rangle$, то з умови (B) випливає, що

$$\forall \mu_1 > 0 \exists c_1 = c_1(\mu_1) > 0 \forall k \in \mathbb{Z} :$$

$$|c_k(f_1)| \leq c_1 \rho(\mu_1 |k|),$$

$$\forall \mu_2 > 0 \exists c_2 = c_2(\mu_2) > 0 \forall k \in \mathbb{Z} :$$

$$|c_k(f_2)| \leq c_2 \rho(\mu_2 |k|).$$

Тоді, урахувавши властивість опуклості функції $\ln \rho$ (див. (3)) знайдемо, що

$$|c_k(f_1 * f_2)| = |c_k(f_1)| \cdot |c_k(f_2)| \leq$$

$$\leq c_1 c_2 \rho(\mu_1 |k|) \rho(\mu_2 |k|) =$$

$$= c_1 c_2 e^{\ln \rho(\mu_1 |k|) + \ln \rho(\mu_2 |k|)} \leq$$

$$\leq c_1 c_2 e^{\ln \rho((\mu_1 + \mu_2) |k|)} =$$

$$= c \rho(\mu |k|), \quad c = c_1 c_2, \mu = \mu_1 + \mu_2.$$

Цим доведено, що $f_1 * f_2 \in H'\langle m_k \rangle$.

Якщо ж, наприклад, $f_1 \in H'\langle m_k \rangle$, то згортка $f_1 * f_2$ – звичайна функція; точніше, правильним є наступне твердження.

Лема 1. Для довільних $\varphi \in H\langle m_k \rangle$ та $f \in H'\langle m_k \rangle$ згортка $f * \varphi$ є елементом простору $H\langle m_k \rangle$.

Доведення. Оскільки $\varphi \in H\langle m_k \rangle$, то (див. умову (A))

$$\exists \mu > 0 \exists c > 0 \forall k \in \mathbb{Z} :$$

$$|c_k(\varphi)| \leq c \rho^{-1}(\mu |k|).$$

Внаслідок умови (B) для $\mu_1 = \mu/2$ знайдеться $c_1 > 0$ таке, що $|c_k(f)| \leq c \rho(\mu_1 |k|)$, $k \in \mathbb{Z}$. Тоді, урахувавши властивість опуклості функції $\ln \rho$, прийдемо до нерівностей

$$\ln \rho(\mu_1 |k|) - \ln \rho(\mu |k|) \leq -\ln \rho((\mu - \mu_1) |k|) =$$

$$= -\ln \rho\left(\frac{\mu}{2} |k|\right), \quad |k| \geq 1.$$

Отже,

$$\rho(\mu_1 |k|) \rho^{-1}(\mu |k|) \leq \rho^{-1}\left(\frac{\mu}{2} |k|\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Таким чином, для коефіцієнтів Фур'є функції $f * \varphi$ справджуються оцінки:

$$|c_k(f * \varphi)| \leq \tilde{c} \rho^{-1}(\tilde{\mu} |k|), \quad k \in \mathbb{Z},$$

де $\tilde{c} = c c_1$, $\tilde{\mu} = \mu/2$. Звідси вже випливає, що $f * \varphi \in H\langle m_k \rangle$.

Лема доведена.

Зазначимо, що для згортки $f * \varphi$, $f \in H'\langle m_k \rangle$, $\varphi \in H\langle m_k \rangle$ правильним є зображення

$$(f * \varphi)(x) = \langle f, T_{-x} \check{\varphi}(\cdot) \rangle \equiv \langle f(t), \varphi(x - t) \rangle,$$

де T_{-x} – оператор зсуву аргументу в просторі $H\langle m_k \rangle$, $\check{\varphi}(\xi) = \varphi(-\xi)$.

4. Нехай $\tilde{G}: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ – неперервна парна функція така, що $\tilde{G}(x) \geq |x|$, $x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$. За допомогою функції $\tilde{G}$ у просторі T' побудуємо оператор $\hat{A}: T' \rightarrow T'$ за правилом

$$T' \ni f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) e^{ikx} \rightarrow \hat{A}f :=$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{G}(k) c_k(f) e^{ikx} \in T',$$

$$c_k(f) = \langle f, e^{-ikx} \rangle, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Легко бачити, що оператор $\hat{A}$ є лінійним і неперервним в T' . Оператор $\hat{A}$ – згортувач в T' . Справді, якщо розглянути узагальнену функцію

$$f_{\tilde{G}}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{G}(k) e^{ikx} \in T',$$

то для довільної узагальненої функції $f \in T'$ маємо

$$\hat{A}f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{G}(k) c_k(f) e^{ikx} = f * f_{\tilde{G}},$$

бо

$$c_k(f * f_{\tilde{G}}) = c_k(f) c_k(f_{\tilde{G}}) = c_k(f) \tilde{G}(k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Якщо $G(x) = |x|^\gamma$, $\gamma \geq 1$, $x \in \mathbb{R}$, то $\hat{A}$ збігається з оператором $\hat{A}_\gamma$ дробового диференціювання в T' [12]. Зазначимо, що сім'я операторів $\hat{A}_\gamma$ володіє властивостями:

а) $\forall f \in T' \forall \{\alpha, \beta\} \subset (0, \infty)$: $\hat{A}_\alpha(\hat{A}_\beta f) = \hat{A}_{\alpha+\beta} f$;

б) $\forall f \in T'$: $\hat{A}_{2k} f = (-1)^k D_x^{2k} f$, $k \in \mathbb{N}$.

Якщо A – звуження оператора $\hat{A}$ на простір $H = L_2[0, 2\pi]$, то, як доведено в [12], A – невід'ємний самоспряжений оператор в H зі щільною в H областю визначення $\mathcal{D}(A)$, причому $T \subset \mathcal{D}(A)$. Оператор A надалі називатимемо псевдодиференціальним оператором у просторі $L_2[0, 2\pi]$.

Нехай $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ – деяка неперервна функція. За функцією f та оператором A побудуємо оператор $f(A)$:

$$f(A)\varphi := \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(\lambda_k) c_k(\varphi) e^{ikx},$$

$$\lambda_k = \tilde{G}(k) = \tilde{G}(-k), \quad \forall \varphi \in H.$$

Тоді $f(A) := A_f$ – невід'ємний самоспряжений оператор в H зі щільною областю визначення

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(A_f) &= \left\{ \varphi \in H : \sum_{k \in \mathbb{Z}} f^2(\lambda_k) |c_k(\varphi)|^2 \equiv \right. \\ &\equiv \left. \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k(A_f \varphi)|^2 < \infty \right\}, \end{aligned}$$

причому $T \subset \mathcal{D}(A_f)$. З'ясуємо, за якої умови на функцію f оператор A_f є обмеженим у просторі $H\langle m_k \rangle$ і відображає цей простір у себе.

Теорема 2. *Якщо неперервна на $[0, \infty)$ функція f задовольняє умову*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists c_\varepsilon > 0 \forall x \in [0, \infty) :$$

$$0 \leq f(x) \leq c_\varepsilon \rho(\varepsilon x), \quad (6)$$

то оператор A_f неперервний у просторі $H\langle m_k \rangle$ і відображає цей простір в себе.

Доведення. Передусім доведемо, що функція $A_f \varphi \in H\langle m_k \rangle$, якщо $\varphi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(\varphi) e^{ikx} \in H\langle m_k \rangle$. Оскільки $c_k(A_f \varphi) =$

$f(\lambda_k) c_k(\varphi)$, $k \in \mathbb{Z}$, то, внаслідок умови (A) досить довести, що

$$\exists \mu_0 > 0 \exists c_0 > 0 \forall k \in \mathbb{Z} :$$

$$f(\lambda_k) |c_k(\varphi)| \leq c_0 \rho^{-1}(\mu_0 |k|).$$

За умовою $\varphi \in H\langle m_k \rangle$, тобто

$$\exists \mu_1 > 0 \exists c_1 > 0 \forall k \in \mathbb{Z} :$$

$$|c_k(\varphi)| \leq c_1 \rho^{-1}(\mu_1 |k|).$$

Отже,

$$\begin{aligned} f(\lambda_k) |c_k(\varphi)| &= c_1 c_\varepsilon \rho(\varepsilon |k|) \rho^{-1}(\mu_1 |k|) = \\ &= c_1 c_\varepsilon e^{\ln \rho(\varepsilon |k|) - \ln \rho(\mu_1 |k|)}. \end{aligned}$$

Візьмемо параметр ε з проміжку $(0, \mu_1)$. Врахувавши нерівність опуклості (3) для функції $\ln \rho$ знайдемо, що

$$\begin{aligned} \ln \rho(\varepsilon |k|) - \ln \rho(\mu_1 |k|) &\leq -\ln \rho((\mu_1 - \varepsilon) |k|) \equiv \\ &\equiv -\ln \rho(\mu_0 |k|), \end{aligned}$$

де $\mu_1 - \varepsilon = \mu_0$. Тоді

$$\varphi(\lambda_k) |c_k(\varphi)| \leq c_0 e^{-\ln \rho(\mu_0 |k|)} = c_0 \rho^{-1}(\mu_0 |k|),$$

звідки й випливає, що $A_f \varphi \in H\langle m_k \rangle$.

Доведемо, що A_f – неперервний оператор у просторі $H\langle m_k \rangle$, тобто кожну обмежену множину цього простору A_f відображає в обмежену множину цього ж простору.

Нехай L – обмежена множина в просторі $H\langle m_k \rangle$. Оскільки $H\langle m_k \rangle = \bigcup_{\alpha > 0} H_{\{\alpha\}}$, то L – обмежена множина в деякому гільбертовому просторі $H_{\{\alpha_0\}}$, тобто

$$\exists b > 0 \forall \varphi \in L :$$

$$\|\varphi\|_{H_{\{\alpha_0\}}} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k(\varphi)|^2 \rho^2\left(\frac{|k|}{\alpha_0}\right) \leq b.$$

Отже,

$$\forall \varphi \in L : |c_k(\varphi)| \leq b \rho^{-1}\left(\frac{|k|}{\alpha_0}\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

У нерівності (6) покладемо $\varepsilon = (2\alpha_0)^{-1}$. Тоді, скориставшись нерівністю опуклості (3) знайдемо, що

$$|c_k(A_f \varphi)| = f(\lambda_k) |c_k(\varphi)| \leq c b \rho^{-1}\left(\left(\frac{1}{\alpha_0} - \varepsilon\right) |k|\right) =$$

$$= b_1 \rho^{-1} \left(\frac{|k|}{2\alpha_0} \right), \quad k \in \mathbb{Z}, b_1 = cb.$$

Отже, множина $A_f L$ обмежена в просторі $H_{\{2\alpha_0\}}$, тобто у просторі $H\langle m_k \rangle$. Теорему доведено.

Зауваження 2. Умова (6) на функцію f еквівалентна тому, що функція

$$F_f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(\lambda_k) e^{ikx} \equiv \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(G(k)) e^{ikx}$$

є елементом простору $H'\langle m_k \rangle$.

Надалі вважатимемо, що функція f додатково задовольняє умову

$$\exists c_0 > 0 \exists d_0 > 0 \forall x \in [0, \infty) :$$

$$f(x) \geq d_0 \ln \rho(c_0 x). \quad (7)$$

5. Розглянемо еволюційне рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A_f u = 0, \quad (t, x) \in (0, T] \times \mathbb{R} \equiv \Omega, \quad (8)$$

де A_f – оператор, побудований у п. 4. Під розв'язком рівняння (8) розуміємо функцію $u(t, x)$, неперервно диференційовну по t при кожному $x \in \mathbb{R}$, яка задовольняє це рівняння, $u(t, \cdot) \in \mathcal{D}(A_f)$ при кожному $t \in (0, T]$.

Розглянемо таку задачу: знайти функцію u , яка є розв'язком рівняння (8) та задовольняє умову

$$\mu u(0, \cdot) - \sum_{k=1}^m \mu_k u(t_k, \cdot) = g, \quad g \in L_2[0, 2\pi], \quad (9)$$

де $m \in \mathbb{N}$, $\{\mu, \mu_1, \dots, \mu_m\} \subset (0, \infty)$, $\{t_1, \dots, t_m\} \subset (0, T]$ – фіксовані числа, причому $\mu > \sum_{k=1}^m \mu_k$, $t_1 < t_2 < \dots < t_m \leq T$.

При цьому $u(0, \cdot)$ розуміємо як $\lim_{t \rightarrow +0} u(t, \cdot)$, де границя розглядається в гільбертовому просторі $H = L_2[0, 2\pi]$, тобто вважаємо, що існує функція $u_0(\cdot) \in H$ така, що $\|u(t, \cdot) - u_0(\cdot)\|_H \rightarrow 0$, $t \rightarrow +0$, $u_0(x) \equiv u(0, x)$. Надалі задачу (8), (9) називатимемо нелокальною багатоточковою за часом задачею для рівняння (8).

Нехай u – розв'язок рівняння (8). Оскільки $u(t, \cdot) \in H$ при кожному $t \in (0, T]$, то

$$u(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{c}_k(t) e^{ikx}, \quad (t, x) \in \Omega,$$

$$\tilde{c}_k(t) \equiv c_k(u(t, \cdot)) = (u(t, \cdot), e^{-ikx})_H, \quad k \in \mathbb{Z},$$

причому

$$\|u(t, \cdot)\|_H^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\tilde{c}_k(t)|^2, \quad t \in (0, T].$$

Для відшукування $\tilde{c}_k(t)$ домножимо (8) скалярно на e^{-ikx} , $k \in \mathbb{Z}$; в результаті прийдемо до співвідношення

$$(u'_t, e^{-ikx}) + (A_f u, e^{-ikx}) = 0.$$

При фіксованому $k \in \mathbb{Z}$ маємо:

$$\begin{aligned} (A_f u, e^{-ikx}) &= (u, A_f e^{-ikx}) = (u, f(\lambda_k) e^{-ikx}) = \\ &= f(\lambda_k) (u, e^{-ikx}) = f(\lambda_k) \tilde{c}_k(t), \\ \lambda_k &= \tilde{G}(k) = \tilde{G}(-k) \end{aligned}$$

(тут враховано, що $e^{-ikx} \in \mathcal{D}(A_f)$ при кожному $k \in \mathbb{Z}$, причому e^{-ikx} є власною функцією оператора A , а $f(\lambda_k)$ – його власне число). Отже,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{c}_k(t) &= \frac{d}{dt} (u(t, \cdot), e^{-ikx}) = \\ &= \left(\frac{d}{dt} u(t, \cdot), e^{-ikx} \right), \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Зауважимо також, що

$$\lim_{t \rightarrow +0} \tilde{c}_k(t) = \tilde{c}_k(0) = c_k(u(0, \cdot)).$$

Функція $\tilde{c}_k(t)$ задовольняє рівняння

$$\tilde{c}'_k(t) + f(\lambda_k) \tilde{c}_k(t) = 0, \quad k \in \mathbb{Z},$$

загальний розв'язок якого має вигляд

$$\tilde{c}_k(t) = c_k \exp\{-tf(\lambda_k)\}, \quad c_k = \text{const}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Тоді

$$u(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \exp\{-tf(\lambda_k)\} e^{ikx}, \quad (t, x) \in \Omega. \quad (10)$$

Для відшукування c_k , $k \in \mathbb{Z}$, помножимо (9) скалярно на e^{-ikx} , $k \in \mathbb{Z}$; у результаті прийдемо до співвідношення

$$\mu \tilde{c}_k(0) - \sum_{n=1}^m \mu_n \tilde{c}_k(t_n) = c_k(g),$$

$$c_k(g) = (g, e^{-ikx}), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Урахувавши вигляд $\tilde{c}_k(t)$ знайдемо, що

$$c_k\left(\mu - \sum_{n=1}^m \mu_n \exp\{-t_n f(\lambda_k)\}\right) = c_k(g).$$

Отже,

$$c_k = c_k(g) \left(\mu - \sum_{n=1}^m \mu_n \exp\{-t_n f(\lambda_k)\}\right)^{-1}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Введемо позначення:

$$Q_1(t, \lambda_k) := \exp\{-t f(\lambda_k)\},$$

$$\begin{aligned} Q_2(\lambda_k) &:= \left(\mu - \sum_{n=1}^m \mu_n \exp\{-t_n f(\lambda_k)\}\right)^{-1} \equiv \\ &\equiv \left(\mu - \sum_{n=1}^m \mu_n Q_1(t_n, \lambda_k)\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Тоді

$$\tilde{c}_k(t) \equiv c_k(u(t, \cdot)) = Q_1(t, \lambda_k) Q_2(\lambda_k) c_k(g), \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{c}_k(t) e^{ikx} = \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} Q_1(t, \lambda_k) Q_2(\lambda_k) c_k(g) e^{ikx} = \\ &= G(t, x) * g(x), \quad (t, x) \in \Omega, \end{aligned}$$

де

$$g(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(g) e^{ikx},$$

$$G(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} Q_1(t, \lambda_k) Q_2(\lambda_k) e^{ikx}.$$

Із обмежень, накладених на функцію f та параметри задачі (8), (9) випливає, що при кожному $t \in (0, T]$ справджуються нерівності

$$\begin{aligned} |c_k(G)| &= |Q_1(t, \lambda_k)| \cdot |Q_2(\lambda_k)| \leq \\ &\leq \exp\{-d_0 t \ln \rho(\mu_0 \lambda_k)\} \times \\ &\times \left(\mu - \sum_{n=1}^m \mu_n \exp\{-d_0 t_n \ln \rho(\mu_0 \lambda_k)\}\right)^{-1} \leq \\ &\leq \left(\mu - \sum_{n=1}^m \mu_n\right)^{-1} \exp\{-d_0 t \ln \rho(\mu_0 \lambda_k)\}, \end{aligned}$$

$$\lambda_k = \tilde{G}(k) = \tilde{G}(-k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

(тут враховано, що $\mu > \sum_{n=1}^m \mu_n$). Звідси та з характеристики класу $H\langle m_k \rangle$ (див. умову (A)) випливає, що $G(t, \cdot) \in H\langle m_k \rangle$ при кожному $t \in (0, T]$. Справді, нехай $d_0 t < 1$. Якщо φ – опукла на $[0, \infty)$ функція, то крім нерівності (3) для такої функції справджуються нерівності:

$$\text{а) } \forall \alpha \in (0, 1) \quad \forall x \in [0, \infty): \varphi(\alpha x) \leq \alpha \varphi(x);$$

$$\text{б) } \forall \alpha \geq 1 \quad \forall x \in [0, \infty): \varphi(\alpha x) \geq \alpha \varphi(x).$$

Урахувавши а) запишемо нерівність:

$$\begin{aligned} -d_0 t \ln \rho(\mu_0 \lambda_k) &\leq -\ln \rho(d_0 t \mu_0 \lambda_k) \equiv \\ &\equiv -\ln \rho(a_1 \lambda_k), \quad a_1 = d_0 t \mu_0. \end{aligned}$$

Отже, якщо $d_0 t < 1$, то

$$|c_k(G)| \leq \gamma e^{-\ln \rho(a_1 \lambda_k)} \equiv \gamma \rho^{-1}(a_1 \lambda_k), \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\gamma = \left(\mu - \sum_{n=1}^m \mu_n\right)^{-1}.$$

Якщо $d_0 t > 1$, то $d_0 t = [d_0 t] + \{d_0 t\}$. Тоді

$$\begin{aligned} e^{-d_0 \ln \rho(\mu_0 \lambda_k)} &= e^{-[d_0 t] \ln \rho(\mu_0 \lambda_k)} \cdot e^{-\{d_0 t\} \ln \rho(\mu_0 \lambda_k)} \leq \\ &\leq e^{-\{d_0 t\} \ln \rho(\mu_0 \lambda_k)} \leq e^{-\ln \rho(a_2 \lambda_k)} = \\ &= \rho^{-1}(a_2 \lambda_k), \quad a_2 = \{d_0 t\} \mu_0. \end{aligned}$$

Таким чином, якщо $d_0 t > 1$, то

$$|c_k(G)| \leq \gamma \rho^{-1}(a_2 \lambda_k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Нехай $a = \min\{a_1, a_2\} = \{d_0 t\} \mu_0$. Тоді при фіксованому $t \in (0, T]$ справджується нерівність

$$|c_k(G)| \leq \gamma \rho^{-1}(a \lambda_k), \quad k \in \mathbb{Z},$$

з якої (та умови (A)) випливає, що $G(t, \cdot) \in H\langle m_k \rangle$, $m_k = k! \rho_k$, при кожному $t \in (0, T]$. Оскільки $u(t, \cdot) = G(t, \cdot) * g$, де $g \in H \subset H'\langle m_k \rangle$, $G(t, \cdot) \in H\langle m_k \rangle$ (при кожному $t \in (0, T]$), то на підставі відповідної властивості згортки стверджуємо, що $u(t, \cdot) \in H\langle m_k \rangle$ при кожному $t \in (0, T]$.

Розв'язок задачі (8), (9) єдиний. Для доведення цієї властивості скористаємося тим,

що будь-який розв'язок рівняння (8) зображається формулою (10), тобто

$$u(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(G_1) c_k(g) e^{ikx} \equiv G_1(t, x) * g(x),$$

де

$$g = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}, c_k = (g, e^{-ikx}),$$

$$G_1(t, x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} Q_1(t, \lambda_k) e^{ikx},$$

$G_1(t, x)$ – фіксована функція з простору $H\langle m_k \rangle$, g – довільно фіксована функція з H (те, що $G_1(t, \cdot) \in H\langle m_k \rangle$ при кожному $t \in (0, T]$ випливає з оцінки $|Q_1(t, \lambda_k)| \leq \gamma \rho^{-1}(a\lambda_k)$, $a, \gamma > 0$, $k \in \mathbb{Z}$, яка рівносильна тому, що $|c_k(G_1)| \leq \gamma \rho^{-1}(a\lambda_k)$, $k \in \mathbb{Z}$).

Якщо $g = 0$, то $c_k = 0$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, звідки й випливає, що $u(t, x) = 0$ для кожного $t \in (0, T]$, що й доводить єдиність розв'язку задачі (8), (9).

Зауважимо, що правильним є і обернене твердження: якщо функція $u(t, x)$ зображається формулою (10), то вона є розв'язком рівняння (8). Справді,

$$\begin{aligned} A_f u &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(A_f u) e^{ikx} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (A_f u, e^{-ikx}) e^{ikx} = \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (u, A_f e^{-ikx}) e^{ikx} = \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (u, f(\lambda_k) e^{-ikx}) e^{ikx} = \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(\lambda_k) \tilde{c}_k(t) e^{ikx}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{c}_k(t) &= (u, e^{-ikx}), \lambda_k = G(k) = G(-k), k \in \mathbb{Z}; \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) e^{ikx} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\partial u}{\partial t}, e^{-ikx} \right) e^{ikx} = \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \frac{\partial}{\partial t} (u, e^{-ikx}) e^{ikx} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{c}'_k(t) e^{ikx}. \end{aligned}$$

Далі зазначимо, що $c_k(t)$ є розв'язком рівняння

$$\tilde{c}'_k(t) + f(\lambda_k) \tilde{c}_k(t) = 0, \quad k \in \mathbb{Z},$$

тобто $\tilde{c}'_k(t) = -f(\lambda_k) \tilde{c}_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}$. Звідси випливає, що u – розв'язок рівняння (8).

Таким чином, функція $u(t, x)$ є розв'язком рівняння (8) тоді й лише тоді, коли вона зображається у вигляді (10). Зазначимо також, що розв'язок задачі (8), (9) неперервно залежить від граничної умови.

Підсумуємо одержані результати у вигляді наступного твердження.

Теорема 3. *Нелокальна багатоточкова за часом задача (8), (9) коректно розв'язна, розв'язок дається формулою*

$$u(t, x) = G(t, x) * g(x), \quad (t, x) \in \Omega,$$

де

$$G(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} Q_1(t, \lambda_k) Q_2(\lambda_k) e^{ikx},$$

$$g(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(g) e^{ikx} \in H,$$

при цьому $\{G(t, \cdot), u(t, \cdot)\} \subset H\langle m_k \rangle$, $m_k = k! \rho_k$, при кожному $t \in (0, T]$.

Зазначимо, що внаслідок відповідної властивості згортки $u(t, \cdot) = G(t, \cdot) * g \in H\langle m_k \rangle$ при кожному $t \in (0, T]$, якщо $g \in H'\langle m_k \rangle$. Доведемо, що тоді функція $u(t, \cdot)$ є розв'язком рівняння (8), який задовольняє умову

$$\begin{aligned} \mu \lim_{t \rightarrow +0} u(t, \cdot) - \sum_{k=1}^m \mu_k \lim_{t \rightarrow t_k} u(t, \cdot) &= g, \quad (11) \\ g &\in H'\langle m_k \rangle, \end{aligned}$$

де границі розглядаються в просторі $H'\langle m_k \rangle$.

Лема 2. *Функція $G(t, \cdot)$, $t \in (0, T]$, як абстрактна функція параметра t із значеннями в просторі $H\langle m_k \rangle$, диференційовна по t .*

Доведення. Оскільки $H\langle m_k \rangle = H\{m_k\} = \bigcup_{\alpha > 0} H_{\{\alpha\}}$, то для доведення твердження досить показати, що

$$\begin{aligned} \Phi_{\Delta t}(x) &:= \frac{1}{\Delta t} [G(t + \Delta t, x) - G(t, x)] \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \\ &\longrightarrow \frac{\partial}{\partial t} G(t, x) \end{aligned}$$

у просторі $H\{m_k\}$ (якщо $\Delta t < 0$, то вважаємо Δt таким, що $t + \Delta t \geq t/2$). Це означає, що

1) множина функцій $\{\Phi_{\Delta t} : |\Delta t| \leq \varepsilon_0, \Delta t \neq 0\}$ ($\varepsilon_0 > 0$ – досить мале фіксоване число) обмежена в просторі $H\{m_k\}$, тобто

$$\exists c > 0 \forall \Delta t (|\Delta t| \leq \varepsilon_0, \Delta t \neq 0) :$$

$$\|\Phi_{\Delta t}\|_{H\{\alpha\}}^2 \leq c$$

при деякому $\alpha > 0$ та фіксованому $t \in (0, T]$;

2) $\Phi_{\Delta t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} G(t, \cdot)$ при $\Delta t \rightarrow 0$ у просторі $H\langle m_k \rangle$, тобто

$$\left\| \Phi_{\Delta t} - \frac{\partial}{\partial t} G(t, \cdot) \right\|_{H\{\alpha\}}^2 \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0.$$

Передусім зазначимо, що функція $G(t, x)$ диференційовна по $t \in (0, T]$ (при кожному $x \in \mathbb{R}$). Справді, нехай $t \in [\tilde{\varepsilon}, T]$, де $\tilde{\varepsilon} > 0$. Доведемо, що ряд

$$-\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(\lambda_k) Q_1(t, \lambda_k) Q_2(\lambda_k) e^{ikx}, t \in [\tilde{\varepsilon}, T], \quad (12)$$

збігається рівномірно по t (при фіксованому x), бо тоді

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(t, x)}{\partial t} &= \\ &= -\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(\lambda_k) Q_1(t, \lambda_k) Q_2(\lambda_k) e^{ikx}. \end{aligned} \quad (13)$$

Оскільки

$$|e^{ikx}| = 1, k \in \mathbb{Z}, |Q_2(\lambda_k)| \leq \gamma,$$

$$\gamma = \left(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k \right)^{-1},$$

то для $t \geq \tilde{\varepsilon}$ (з урахуванням умов (6), (7)) маємо, що

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists c_\varepsilon > 0 : \alpha(t, x) &:= \\ &= | -f(\lambda_k) Q_1(t, \lambda_k) Q_2(\lambda_k) e^{ikx} | \leq \\ &\leq \gamma f(\lambda_k) \exp\{-\tilde{\varepsilon} f(\lambda_k)\} \leq \\ &\leq c_\varepsilon \gamma \exp\{-\tilde{\varepsilon} d_0 \ln \rho(c_0 \lambda_k)\} \exp\{\ln \rho(\varepsilon \lambda_k)\}. \end{aligned}$$

Вважаючи, що $\tilde{\varepsilon} d_0 < 1$ та врахувавши опуклість функції $\ln \rho$, прийдемо до нерівності:

$$\alpha(t, x) \leq c_\varepsilon \gamma \exp\{-\ln \rho(\tilde{\varepsilon} d_0 - \varepsilon) \lambda_k\}.$$

Оскільки $\varepsilon > 0$ – довільне, то покладемо $\varepsilon = \tilde{\varepsilon} d_0 / 2$. Тоді

$$\alpha(t, x) \leq \tilde{c} \exp\left\{-\ln \rho\left(\frac{\tilde{\varepsilon}}{2} d_0 \lambda_k\right)\right\} = \tilde{c} \rho^{-1}(\beta \lambda_k), \quad (14)$$

$$\beta = \tilde{\varepsilon} d_0 / 2, t \in [\tilde{\varepsilon}, T], x \in \mathbb{R}.$$

Із (14) та властивостей функції ρ випливає, що ряд (13) збігається рівномірно при $t \geq \tilde{\varepsilon}$. Цим доведено, що функція $G(t, \cdot)$ диференційовна по t на відрізку $[\tilde{\varepsilon}, T]$. Оскільки $\tilde{\varepsilon} > 0$ – довільне, то функція $G(t, \cdot)$ диференційовна по t на проміжку $(0, T]$, при цьому правильним є співвідношення (13), яке виконується у кожній точці $t \in (0, T]$. Зазначимо також, що при кожному $t \in (0, T]$ функція $\frac{\partial}{\partial t} G(t, \cdot)$ є елементом простору $H\langle m_k \rangle$, оскільки

$$c_k \left(\frac{\partial}{\partial t} G(t, \cdot) \right) = -f(\lambda_k) Q_1(t, \lambda_k) Q_2(\lambda_k)$$

і, як випливає з (14), для коефіцієнтів Фур'є функції $\frac{\partial}{\partial t} G(t, \cdot)$ справджується оцінка

$$\begin{aligned} \left| c_k \left(\frac{\partial}{\partial t} G(t, \cdot) \right) \right| &\leq c \rho^{-1}(\beta \lambda_k) = c e^{-\ln \rho(\beta G(|k|))} \leq \\ &\leq e^{-\ln \rho(\beta |k|)} = c \rho^{-1}(\beta |k|), k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Це і означає (див. (A)), що $\frac{\partial}{\partial t} G(t, \cdot) \in H\langle m_k \rangle$ при кожному $t \in (0, T]$.

Оскільки

$$\begin{aligned} \Phi_{\Delta t}(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\Delta t} \left[e^{-(t+\Delta t)f(\lambda_k)} - \right. \\ &\quad \left. - e^{-tf(\lambda_k)} \right] Q_2(\lambda_k) e^{ikx} = \\ &= -\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(\lambda_k) e^{-(t+\theta \Delta t)f(\lambda_k)} Q_2(\lambda_k) e^{ikx}, 0 < \theta < 1, \end{aligned}$$

то

$$c_k(\Phi_{\Delta t}) = -f(\lambda_k) Q_1(t + \theta \Delta t, \lambda_k) Q_2(\lambda_k).$$

Тоді для довільно фіксованого $\alpha > 0$, конкретне значення якого вкажемо пізніше, справджуються співвідношення:

$$\|\Phi_{\Delta t}\|_{H\{\alpha\}}^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k(\Phi_{\Delta t})|^2 \rho^2\left(\frac{|k|}{\alpha}\right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} f^2(\lambda_k) \rho^2 \left(\frac{|k|}{\alpha} \right) e^{-2(t+\theta\Delta t)f(\lambda_k)} Q_2^2(\lambda_k) \leq \\
&\leq \gamma^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} f^2(\lambda_k) \rho^2 \left(\frac{|k|}{\alpha} \right) e^{-2tf(\lambda_k)} \leq \\
&\leq \gamma^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} f^2(\lambda_k) e^{2\ln \rho \left(\frac{|k|}{\alpha} \right)} e^{-2\ln \rho(a_1\lambda_k)}, \\
&a_1 = \{d_0 t\} c_0, \gamma = \left(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k \right)^{-1},
\end{aligned}$$

d_0, c_0 – сталі з умови (7). З урахуванням (6) та властивості опуклості функції $\ln \rho$ маємо, що

$$\begin{aligned}
f^2(\lambda_k) e^{-2\ln \rho(a_1\lambda_k)} &\leq c_\varepsilon^2 e^{2\ln \rho(\varepsilon\lambda_k) - 2\ln \rho(a_1\lambda_k)} \leq \\
&\leq c_\varepsilon^2 e^{-2\ln \rho((a_1-\varepsilon)\lambda_k)} = c_\varepsilon^2 e^{-2\ln \rho(a_2\lambda_k)}, a_2 = a_1/2,
\end{aligned}$$

якщо покласти $\varepsilon = a_1/2$. Із властивостей функції ρ та $\tilde{G}$ випливають нерівності

$$\rho(a_2\lambda_k) \geq a_2\lambda_k = a_2\tilde{G}(|k|) \geq a_2|k|, k \in \mathbb{Z};$$

тоді, знову скориставшись властивістю опуклості $\ln \rho$, прийдемо до нерівностей:

$$\begin{aligned}
\|\Phi_{\Delta t}\|_{H_{\{\alpha\}}}^2 &\leq \gamma^2 c_\varepsilon^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{2\ln \rho \left(\frac{|k|}{\alpha} \right)} e^{-2\ln \rho(a_2|k|)} \leq \\
&\leq b \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-2\ln \rho \left(\left(a_2 - \frac{1}{\alpha} \right) |k| \right)} = b \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-2\ln \rho(a_3|k|)} = \\
&= b \sum_{k \in \mathbb{Z}} \rho^{-2}(a_3|k|) < \infty, a_3 = a_2 - \frac{1}{\alpha}
\end{aligned}$$

для фіксованого $\alpha > 0$ такого, що $a_2 - 1/\alpha > 0$ (тобто для $\alpha > 1/a_2$). Отже, множина функцій $\{\Phi_{\Delta t}, |\Delta t| \leq \varepsilon_0, \Delta t \neq 0\}$ обмежена в просторі $H\{m_k\} = H\langle m_k \rangle$.

Перевіримо виконання умови 2). Нехай

$$\begin{aligned}
\Psi_{\Delta t}(x) &:= \Phi_{\Delta t}(x) - \frac{\partial}{\partial t} G(t, x) = \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} [e^{-tf(\lambda_k)} - e^{-(t+\theta\Delta t)f(\lambda_k)}] Q_2(\lambda_k) f(\lambda_k) e^{ikx}.
\end{aligned}$$

Звідси випливає, що

$$\|\Psi_{\Delta t}\|_{H_{\{\alpha\}}}^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k(\Psi_{\Delta t})|^2 \rho^2 \left(\frac{|k|}{\alpha} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k(\Psi_{\Delta t})|^2 e^{2\ln \rho \left(\frac{|k|}{\alpha} \right)} = \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{2\ln \rho \left(\frac{|k|}{\alpha} \right)} |e^{-tf(\lambda_k)} - e^{-(t+\theta\Delta t)f(\lambda_k)}|^2 \times \\
&\times Q_2^2(\lambda_k) f^2(\lambda_k) \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{2\ln \rho \left(\frac{|k|}{\alpha} \right)} e^{-2(t+\theta_1\Delta t)f(\lambda_k)} \times \\
&\times f^4(\lambda_k) \theta^2(\Delta t)^2 Q_2^2(\lambda_k) \leq \\
&\leq \gamma^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{2\ln \rho \left(\frac{|k|}{\alpha} \right)} e^{-2tf(\lambda_k)} f^4(\lambda_k) (\Delta t)^2, \\
&0 < \theta_1 < 1, \gamma = \left(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k \right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Внаслідок (6) та властивості опуклості функції $\ln \rho$

$$\begin{aligned}
f^4(\lambda_k) e^{-2tf(\lambda_k)} &\leq c_\varepsilon^4 e^{-2\ln \rho(a_1\lambda_k)} e^{4\ln \rho(\varepsilon\lambda_k)} \leq \\
&\leq c_\varepsilon^4 e^{-2\ln \rho(a_1\lambda_k)} e^{2\ln \rho(2\varepsilon\lambda_k)} \leq c_\varepsilon^4 e^{-2\ln \rho((a_1-2\varepsilon)\lambda_k)} = \\
&= c_\varepsilon^4 e^{-2\ln \rho(a_4\lambda_k)}, a_4 = a_1/2,
\end{aligned}$$

якщо покласти $\varepsilon = a_1/4$. Оскільки

$$\rho(a_4\lambda_k) \geq a_4\lambda_k = a_4\tilde{G}(|k|) \geq a_4|k|, k \in \mathbb{Z},$$

то

$$\begin{aligned}
\|\Psi_{\Delta t}\|_{H_{\{\alpha\}}}^2 &\leq \tilde{b} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{2\ln \rho \left(\frac{|k|}{\alpha} \right)} \times \\
&\times e^{-2\ln \rho(a_4|k|)} (\Delta t)^2 \leq \tilde{c}(\Delta t)^2,
\end{aligned}$$

де

$$\tilde{b} = \gamma^2 c_\varepsilon^4, \tilde{c} = \tilde{b} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-2\ln \rho \left(\left(a_4 - \frac{1}{\alpha} \right) |k| \right)} < \infty$$

для довільно фіксованого $\alpha > 1/a_4$. Звідси вже випливає, що $\|\Psi_{\Delta t}\|_{H_{\{\alpha\}}} \rightarrow 0$ при $\Delta t \rightarrow 0$

(для $\alpha > 1/a_4$), тобто $\Phi_{\Delta t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} G(t, \cdot)$ при $\Delta t \rightarrow 0$ у просторі $H\{m_k\} = H\langle m_k \rangle$, $m_k = k! \rho_k$. Лемі доведено.

Наслідок 1. *Функція*

$$\begin{aligned}
u(t, x) &= G(t, x) * g = \langle g(y), G(t, x - y) \rangle, \\
g &\in H'\langle m_k \rangle,
\end{aligned}$$

диференційовна по t , при цьому

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} G(t, x) * g.$$

Зазначимо, що функція $u(t, x) = G(t, x) * g$, $g \in H'\langle m_k \rangle$, задовольняє рівняння (8).

Лема 3. Нехай

$$u(t, x) = G(t, x) * g, g \in H'\langle m_k \rangle, (t, x) \in \Omega.$$

Тоді в просторі $H'\langle m_k \rangle$ справджується граничне співвідношення

$$\mu \lim_{t \rightarrow +0} u(t, \cdot) - \sum_{k=1}^m \mu_k \lim_{t \rightarrow t_k} u(t, \cdot) = g. \quad (15)$$

Доведення. Для доведення (15) візьмемо довільний елемент $\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(\varphi) e^{ikx} \in$

$H\langle m_k \rangle$ і зазначимо, що внаслідок неперервності вкладення $H\langle m_k \rangle$ в $H'\langle m_k \rangle$ та ортонормованості базису $\{e^{ikx}, k \in \mathbb{Z}\}$

$$\begin{aligned} \langle u(t, \cdot), \varphi \rangle &= (u(t, \cdot), \varphi)_H = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(u(t, \cdot)) c_k(\varphi) = \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} Q_1(t, \lambda_k) Q_2(\lambda_k) c_k(g) c_k(\varphi). \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} \mu \lim_{t \rightarrow +0} \langle u(t, \cdot), \varphi \rangle - \sum_{n=1}^m \mu_n \lim_{t \rightarrow t_n} \langle u(t, \cdot), \varphi \rangle &= \\ &= \mu \lim_{t \rightarrow +0} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(u(t, \cdot)) c_k(\varphi) - \\ &- \sum_{n=1}^m \mu_n \lim_{t \rightarrow t_n} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(u(t, \cdot)) c_k(\varphi); \end{aligned}$$

при цьому ряд $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(u(t, \cdot)) c_k(\varphi)$ збігається рівномірно на $[0, T]$. Цей факт впливає з вигляду коефіцієнтів $c_k(u(t, \cdot))$, $k \in \mathbb{Z}$, та нерівності

$$|c_k(u(t, \cdot))| \cdot |c_k(\varphi)| \leq \tilde{c} |c_k(g)| \cdot |c_k(\varphi)|,$$

$$t \in [0, T], k \in \mathbb{Z}.$$

Справді, за умовою $g \in H'\langle m_k \rangle$, тобто

$$\forall \mu > 0 \exists c = c(\mu) > 0 \forall k \in \mathbb{Z} :$$

$$|c_k(g)| \leq c\rho(\mu|k|).$$

Функція $\varphi \in H\langle m_k \rangle$, тому, внаслідок умови (A),

$$\exists \mu_0 > 0 \exists c_0 > 0 \forall k \in \mathbb{Z} : |c_k(\varphi)| \leq c_0 \rho^{-1}(\mu_0|k|).$$

Покладемо $\mu = \mu_0/2$. Тоді, урахувавши нерівність опуклості (3) знайдемо, що

$$\begin{aligned} |c_k(g)| \cdot |c_k(\varphi)| &\leq c c_0 \rho^{-1}(\mu_0|k|) \rho\left(\frac{\mu_0}{2}|k|\right) = \\ &= c c_0 e^{-\ln \rho(\mu_0|k|)} e^{\ln \rho\left(\frac{\mu_0}{2}|k|\right)} \leq c_0 c e^{-\ln \rho\left(\frac{\mu_0}{2}|k|\right)} = \\ &= \tilde{c} \rho^{-1}\left(\frac{\mu_0}{2}|k|\right) \leq \tilde{c} |k|^{-2}, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

З останньої нерівності випливає сформульована властивість.

Таким чином,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_n} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(u(t, \cdot)) c_k(\varphi) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(u(t_n, \cdot)) c_k(\varphi) = \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} Q_1(t_n, \lambda_k) Q_2(\lambda_k) c_k(g) c_k(\varphi). \quad (16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +0} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(u(t, \cdot)) c_k(\varphi) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(u(0, \cdot)) c_k(\varphi) = \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} Q_2(\lambda_k) c_k(g) c_k(\varphi). \quad (17) \end{aligned}$$

Урахувавши (16), (17) знайдемо, що

$$\begin{aligned} \mu \lim_{t \rightarrow +0} \langle u(t, \cdot), \varphi \rangle - \sum_{n=1}^m \mu_n \lim_{t \rightarrow t_n} \langle u(t, \cdot), \varphi \rangle &= \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left[\left(\mu - \sum_{n=1}^m \mu_n Q_1(t_n, \lambda_k) \right) Q_2(\lambda_k) \right] c_k(g) c_k(\varphi) = \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\mu - \sum_{n=1}^m \mu_n Q_1(t_n, \lambda_k)}{\mu - \sum_{n=1}^m \mu_n Q_1(t_n, \lambda_k)} c_k(g) c_k(\varphi) = \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(g) c_k(\varphi) = \langle g, \varphi \rangle, \varphi \in H\langle m_k \rangle, \end{aligned}$$

$$m_k = k! \rho_k, g = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(g) e^{ikx} \in H'\langle m_k \rangle,$$

що й потрібно було довести.

Оскільки $u(t, x) = G(t, x)$, якщо $g = \delta \in H'\langle m_k \rangle$, то функція $G(t, x)$ є розв'язком рівняння (8) і з (15) випливає, що функція $G(t, x)$ в просторі $H'\langle m_k \rangle$ задовольняє граничне співвідношення

$$\mu \lim_{t \rightarrow +0} G(t, \cdot) - \sum_{n=1}^m \mu_n \lim_{t \rightarrow t_n} G(t, \cdot) = \delta.$$

Надалі $G(t, x)$, $(t, x) \in \Omega$, називатимемо фундаментальним розв'язком багатоточкової за часом задачі для рівняння (8).

Лема 3 дозволяє ставити багатоточкову за часом задачу для рівняння (8) у розумінні (15), де граничний елемент g належить до простору $H'\langle m_k \rangle$ (при цьому відповідні границі в (15) розглядаються в просторі $H'\langle m_k \rangle$).

Правильним є наступне твердження.

Теорема 4. Багатоточкова задача (8), (15) коректно розв'язна, її розв'язок зображається формулою

$$u(t, x) = G(t, x) * g, \quad (t, x) \in \Omega,$$

$u(t, \cdot) \in H\langle m_k \rangle$ при кожному $t \in (0, T]$.

Доведення. Із наведених вище тверджень випливає, що доведення вимагає властивість єдиності розв'язку задачі (8), (15) та його неперервної залежності від граничної умови.

Нехай $u(t, x)$ – розв'язок задачі (8), (15). Оскільки u – розв'язок рівняння (8) (у вказаному вище розумінні), то u зображається у вигляді (див. (10)):

$$u(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k Q_1(t, \lambda_k) e^{ikx}.$$

Якщо

$$c_k = c_k(g) Q_2(\lambda_k),$$

$$g = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(g) e^{ikx} \in H'\langle m_k \rangle,$$

то u задовольняє умову (15). Отже, за умови $g = 0$ маємо $c_k(g) = \langle g, e^{-ikx} \rangle = 0$, $k \in \mathbb{Z}$, тобто $u(t, x) = 0$, $(t, x) \in \Omega$.

Розв'язок вказаної задачі неперервно залежить від граничної умови. Справді, нехай $\{g, g_n, n \geq 1\} \subset H'\langle m_k \rangle$, причому $g_n \rightarrow g$ при

$n \rightarrow \infty$ у просторі $H'\langle m_k \rangle$. Звідси випливає, що

$$c_k(g_n) = \langle g_n, e^{-ikx} \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle g, e^{-ikx} \rangle = c_k(g)$$

для кожного $k \in \mathbb{Z}$. Крім того, $\{u, u_n, n \geq 1\} \subset H\langle m_k \rangle$, де u_n – розв'язок задачі (8), (15), який відповідає граничному елементу $g_n \in H'\langle m_k \rangle$. Тоді

$$\forall \varphi \in H\langle m_k \rangle : \langle u_n, \varphi \rangle = (u_n, \varphi) =$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(G) c_k(g_n) c_k(\varphi) \xrightarrow{n \rightarrow \infty}$$

$$\longrightarrow \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(G) c_k(g) c_k(\varphi) = (u, \varphi) = \langle u, \varphi \rangle.$$

Отже, $u_n \rightarrow u$ при $n \rightarrow \infty$ у просторі $H'\langle m_k \rangle$. Теорема доведена.

6. Функція $G(t, \cdot)$ – фундаментальний розв'язок нелокальної багатоточкової за часом задачі для рівняння (8), є неперервною абстрактною функцією параметра $t \in (0, T]$ зі значеннями в просторі $H\langle k! \rho_k \rangle$ (див. лему 2). Оскільки гранична узагальнена функція $g \in H'\langle k! \rho_k \rangle$ – згортувач у просторі $H\langle k! \rho_k \rangle$, а розв'язок $u(t, \cdot)$ задачі (8), (15) подається у вигляді згортки $G(t, x) * g$, то звідси дістаємо, що граничні співвідношення

$$u(t, \cdot) = G(t, \cdot) * g \xrightarrow{n \rightarrow \infty} G(t_i, \cdot) * g = u(t_i, \cdot),$$

$$t_i \in (0, T], i \in \{1, \dots, m\},$$

виконуються в просторі $H\langle k! \rho_k \rangle$. Із означення збіжності в цьому просторі випливає, зокрема, що $u(t, \cdot) \rightarrow u(t_i, \cdot)$ при $t \rightarrow t_i$, $i \in \{1, \dots, m\}$, рівномірно на довільному відрізку $[a, b] \subset [0, 2\pi]$. Вказану збіжність в (15) погіршує перший доданок, оскільки для функції $G(t, \cdot)$ точка $t = 0$ є особливою. Однак виявляється, що якщо граничну функцію g брати з вузкого, ніж $H'\langle k! \rho_k \rangle$ класу, то можна отримати локальне покращення збіжності згортки $G(t_i, \cdot) * g$ при $t \rightarrow +0$.

Розглянемо простір Жевре $H\langle k^{k\beta} \rangle \equiv G_{\{\beta\}}$ при $\beta > 1$. Оскільки в такому просторі є фінитні функції [8], то для ультрарозподілу $g \in G'_{\{\beta\}}$, $\beta > 1$, має зміст таке означення: узагальнена функція $g \in G'_{\{\beta\}}$, $\beta > 1$, дорівнює нулеві на інтервалі $(a, b) \subset [0, 2\pi]$,

якщо $\langle g, \varphi \rangle = 0$ для довільної основної функції $\varphi \in G_{\{\beta\}}$, $\beta > 1$, носій якої міститься в (a, b) .

Надалі вважатимемо, що функція f , за якою будується оператор A_f , додатково задовольняє умови:

а) вона є парною, двічі неперервно диференційовною на $\mathbb{R}$ функцією,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall k \in \{0, 1, 2\} \quad \exists c_{\varepsilon, k} > 0 \quad \forall \sigma \in \mathbb{R} :$$

$$|f^{(k)}(\sigma)| \leq c_{\varepsilon, k} \rho(\varepsilon \sigma),$$

б) f – однорідна порядку $\gamma > 1$ функція, тобто $f(\lambda \sigma) = \lambda^\gamma f(\sigma)$, $\sigma \in \mathbb{R}$, для кожного $\lambda > 0$.

Крім того, вважаємо, що $G(\sigma) = |\sigma|$, $\sigma \in \mathbb{R}$.

При обґрунтуванні властивості локалізації використовуватимемо наступне допоміжне твердження.

Лема 4. *Нехай $\tilde{G}(t, x) = F_{\sigma \rightarrow x}^{-1}[Q(t, \sigma)](x)$,*

$$Q(t, \sigma) = Q_1(t, \sigma)Q_2(\sigma), \quad \sigma \in \mathbb{R}.$$

Якщо $x \neq 0$, то функція $\tilde{G}(t, x)$ задовольняє нерівність

$$|\tilde{G}(t, x)| \leq ct^\mu |x|^{-2}, \quad \mu = 1 - 1/\gamma > 0, \quad x \neq 0, \quad (18)$$

стала c не залежить від t (тут Q_1, Q_2 – функції, розглянуті раніше).

Зазначимо, що доведення леми 4 використовує властивості а), б) функції f .

Теорема 5. *Нехай $g \in G'_{\{\beta\}}$, $\beta > 1$ і $g = 0$ на інтервалі $(a, b) \subset [0, 2\pi]$. Тоді розв'язок задачі (8), (15) з граничною функцією g прямує до нуля при $t \rightarrow +0$ рівномірно на довільному відрізку $[c, d] \subset (a, b)$.*

Доведення. Нехай $[c, d] \subset [a_1, b_1] \subset (a, b)$. Побудуємо функцію $\varphi \in G_{\{\beta\}}$, $\beta > 1$, з носієм в (a, b) таку, що $\varphi = 1$ на $[a_1, b_1]$. Функції $\varphi(\xi)G(t, x - \xi)$, $(1 - \varphi(\xi))G(t, x - \xi)$, як функції аргументу ξ (при кожному $t > 0$ і $x \in \mathbb{R}$), належать до простору $G_{\{\beta\}}$, тому має зміст рівність

$$u(t, x) = \langle g(\xi), \varphi(\xi)G(t, x - \xi) \rangle + \langle g(\xi), (1 - \varphi(\xi))G(t, x - \xi) \rangle.$$

Враховуючи, що $g = 0$ на (a, b) , а також включення $\text{supp}(\varphi(\xi)G(t, x - \xi)) \subset (a, b)$, приходимо до співвідношення

$$u(t, x) = \langle g(\xi), \tilde{\gamma}(\xi)G(t, x - \xi) \rangle,$$

$$\tilde{\gamma}(\xi) = 1 - \varphi(\xi),$$

або

$$u(t, x) = t^\nu \langle g(\xi), t^{-\nu} \tilde{\gamma}(\xi)G(t, x - \xi) \rangle,$$

$$\nu = 1 - 1/\gamma > 0, \quad t > 0.$$

Отже, для доведення сформульованого твердження досить перевірити, що сукупність функцій $\Phi_{t,x}(\xi) = t^\nu \tilde{\gamma}(\xi)G(t, x - \xi)$ обмежена в просторі $G_{\{\beta\}}$, $\beta > 1$, рівномірно по t (при досить малих значеннях t) і $x \in [c, d]$, тобто, що

$$|D_\xi^m \Phi_{t,x}(\xi)| \leq cB^m m^{m\beta}, \quad m \in \mathbb{Z}_+, \quad (19)$$

де сталі $c, B > 0$ не залежать від t, x, ξ , які змінюються вказаним вище способом. Зауважимо ще, що $\Phi_{t,x}(\xi) = 0$ для $\xi \in [a_1, b_1]$, тому оцінку (19) досить отримати для $\xi \in [0, 2\pi] \setminus [a_1, b_1]$.

Передусім отримаємо оцінку вигляду (19) для похідних функції

$$G(t, x - \xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} Q(t, |k|) e^{ik(x-\xi)}.$$

На підставі формули Пуассона для підсумовування тригонометричних рядів (див. [13]) маємо, що

$$\begin{aligned} G(t, x - \xi) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} F[F^{-1}[Q(t, \sigma)]](k) e^{ik(x-\xi)} = \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} F[\tilde{G}(t, x)](k) e^{ik(x-\xi)} = \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{G}(t, x - \xi + 2k\pi). \end{aligned} \quad (20)$$

Цей ряд при $t > 0$ і $x \in [c, d]$ є аналітичною функцією змінної ξ , оскільки, як було доведено раніше, $G(t, \cdot) \in H\langle k! \rho_k \rangle$ при кожному $t > 0$.

Візьмемо обмежену область $Q \subset \mathbb{C}$, яка містить відрізок $[c, d]$ і не містить множини $[0, 2\pi] \setminus [a_1, b_1]$, з гладкою межею ∂Q (∂Q не

перетинає відрізок $[c, d]$. Тоді, згідно з інтегральною теоремою Коші,

$$D_\xi^m G(t, x - \xi) = \frac{m!}{2\pi i} \int_{\partial Q} \frac{G(t, x - z)}{(z - \xi)^{m+1}} dz,$$

$$x \in [c, d], \xi \in [0, 2\pi] \setminus [a_1, b_1].$$

Звідси дістаємо, що

$$|D_\xi^m G(t, x - \xi)| \leq \frac{m!}{2\pi} \frac{l}{A^{m+1}} \max_{z \in \partial Q} |G(t, x - z)|,$$

де l – довжина контура ∂Q , $A = \inf_{z \in \partial Q} |z - \xi|$, $z \in \partial Q$, $\xi \in [0, 2\pi] \setminus [a_1, b_1]$. Для того, щоб здійснити оцінку $\max_{z \in \partial Q} |G(t, x - z)|$, скористаємося формулою (20). Оскільки $x \in [c, d]$, $\xi \in [0, 2\pi] \setminus [a_1, b_1]$, то $|x - \xi| \geq a_0 > 0$, де $a_0 = \min\{|a_1 - c|, |d - b_1|\}$, то, згідно з оцінкою (18) та формулою (20),

$$|\tilde{G}(t, x - \xi + 2\pi k)| \leq ct^\nu |x - \xi + 2\pi k|^{-2},$$

$$\nu = 1 - 1/\gamma > 0.$$

За рахунок вибору відрізка $[a_1, b_1]$ можна підібрати число b_0 , $0 < b_0 < 1$, так, що

$$|x - \xi + 2\pi k| \geq a_0 + b_0 |k|, x \in [c, d],$$

$$\xi \in [0, 2\pi] \setminus [a_1, b_1].$$

Тоді

$$t^{-\nu} |G(t, x - \xi)| \leq c \sum_{k \in \mathbb{Z}} |x - \xi + 2\pi k|^{-2} \leq$$

$$\leq c \sum_{k \in \mathbb{Z}} (a_0 + b_0 |k|)^{-2} = M < \infty,$$

стала M не залежить від t, x, ξ . Взявши до уваги неперервність $G(t, x - z)$ за сукупністю змінних $t > 0$, $x \in [c, d]$, $z \in \overline{Q}$, підберемо область $Q \subset \mathbb{C}$ так, щоб справджувалась нерівність $t^{-\nu} |G(t, x - z)| \leq M$, $M = M + 1$.

Отже,

$$t^{-\nu} |D_\xi^m G(t, x - \xi)| \leq c_1 B_1^m m! \leq c_2 B_2^m m^m, \quad (21)$$

$m \in \mathbb{Z}_+$. Оскільки $\varphi \in G_{\{\beta\}}$, $\beta > 1$, то також

$$|D_\xi^m \varphi(\xi)| \leq c_3 B_3^m m^{m\beta}, m \in \mathbb{Z}_+. \quad (22)$$

З (21), (22) випливають оцінки:

$$|D_\xi^m \Phi_{t,x}(\xi)| \leq t^{-\nu} \sum_{l=0}^m C_m^l |D_\xi^l \gamma(\xi)| \times$$

$$\times |D_\xi^{m-l} G(t, x - \xi)| \leq c_4 B_4^m m^{m\beta}, m \in \mathbb{Z}_+,$$

де $c_4 = c_2(1 + c_3)$, $B_4 = 2 \max\{B_2, B_3\}$, сталі $c_4, B_4 > 0$ не залежать від t, x, ξ , які змінюються вказаним вище способом. Твердження доведено.

Наслідок 2. Нехай $g \in G'_{\{\beta\}} \subset H'\langle k! \rho_k \rangle$, $\beta > 1$, $u(t, x)$ – розв’язок задачі (8), (15) з граничною функцією g . Якщо $g = 0$ на інтервалі $(a, b) \subset \mathbb{R}$, то граничне співвідношення

$$\mu \lim_{t \rightarrow +0} u(t, x) - \mu_1 \lim_{t \rightarrow t_1} u(t, x) - \dots -$$

$$-\mu_m \lim_{t \rightarrow t_m} u(t, x) = 0,$$

справджується рівномірно відносно x на довільному відрізку $[c, d] \subset (a, b) \subset [0, 2\pi]$.

Символом $M_{\{\beta\}}$ позначимо клас функцій, які є мультиплікаторами в просторі $G_{\{\beta\}}$, $\beta > 1$.

Теорема 6 (властивість локалізації).

Нехай $g \in G'_{\{\beta\}} \subset H'\langle k! \rho_k \rangle$, $\beta > 1$, $u(t, x)$ – розв’язок задачі (8), (15) з граничною функцією g . Якщо узагальнена функція g збігається на інтервалі $(a, b) \subset \mathbb{R}$ з 2π -періодичною функцією $\psi \in M_{\{\beta\}}$, то на довільному проміжку $[c, d] \subset (a, b) \subset [0, 2\pi]$ граничне співвідношення

$$\mu \lim_{t \rightarrow +0} u(t, x) - \mu_1 \lim_{t \rightarrow t_1} u(t, x) - \dots -$$

$$-\mu_m \lim_{t \rightarrow t_m} u(t, x) = \psi(x), \quad (23)$$

виконується рівномірно відносно $x \in [c, d]$.

Доведення. Нехай φ – основна функція, побудована при доведенні теореми 5. Оскільки $\varphi(g - \psi) = 0$ на (a, b) , то $\varphi(g - \psi) = 0$ на $[c, d]$, $(1 - \varphi)g = 0$ на $[a_1, b_1]$. З наслідку 2 випливає, що граничні співвідношення

$$\lim_{t \rightarrow +0} \langle \varphi(g - \psi), G(t, x - \xi) \rangle = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow +0} \langle (1 - \varphi)g, G(t, x - \xi) \rangle = 0,$$

$$\sum_{k=1}^m \mu_k \lim_{t \rightarrow t_k} \langle \varphi(g - \psi), G(t, x - \xi) \rangle = 0, \quad (24)$$

$$\sum_{k=1}^m \mu_k \lim_{t \rightarrow t_k} \langle (1 - \varphi)g, G(t, x - \xi) \rangle = 0$$

виконуються рівномірно відносно $x \in [c, d]$.

Крім того,

$$u(t, x) = \langle g, G(t, x - \xi) \rangle = \langle \varphi(g - \psi), G(t, x - \xi) \rangle + \\ + \langle (1 - \varphi)g, G(t, x - \xi) \rangle + \langle \varphi\psi, G(t, x - \xi) \rangle.$$

Урахувавши (24) робимо висновок, що для доведення твердження досить встановити, що граничне співвідношення

$$\mu \lim_{t \rightarrow +0} \langle \varphi\psi, G(t, x - \xi) \rangle - \\ - \sum_{n=1}^m \mu_n \lim_{t \rightarrow t_n} \langle \varphi\psi, G(t, x - \xi) \rangle = \psi(x)$$

виконується рівномірно відносно $x \in [c, d]$.

Оскільки ψ – мультиплікатор у просторі $G_{\{\beta\}}$, φ – фінитна функція з цього ж простору, то $\varphi\psi \in G_{\{\beta\}}$, $\beta > 1$. Тоді

$$\langle \varphi\psi, G(t, x - \xi) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(t, x - \xi)(\varphi\psi)(\xi) d\xi = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} Q_1(t, |k|) Q_2(|k|) e^{ik(x - \xi)} (\varphi\psi)(\xi) d\xi = \\ = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(\varphi\psi) Q_1(t, |k|) Q_2(|k|) e^{ikx} \equiv \sum_{k \in \mathbb{Z}} w_k(t, x), \\ c_k(\varphi\psi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\varphi\psi)(\xi) e^{-ik\xi} d\xi.$$

Зазначимо, що ряд $\sum_{k \in \mathbb{Z}} w_k(t, x)$ збігається рівномірно по t на $[0, T]$ та рівномірно відносно $x \in [0, 2\pi]$ (доведення цієї властивості здійснюється за схемою доведення леми 3). Тоді

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \sum_{k \in \mathbb{Z}} w_k(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} w_k(t_0, x), t_0 \in [0, T].$$

Звідси випливають співвідношення

$$\mu \lim_{t \rightarrow +0} \langle \varphi\psi, G(t, x - \xi) \rangle - \\ - \sum_{n=1}^m \mu_n \lim_{t \rightarrow t_n} \langle \varphi\psi, G(t, x - \xi) \rangle = \\ = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left[\left(\mu - \sum_{n=1}^m \mu_n Q_1(t_n, |k|) \right) Q_2(|k|) \right] c_k(\varphi\psi) e^{ikx} = \\ = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\mu - \sum_{n=1}^m \mu_n Q_1(t_n, |k|)}{\mu - \sum_{n=1}^m \mu_n Q_1(t_n, |k|)} c_k(\varphi\psi) e^{ikx} = \\ = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(\varphi\psi) e^{ikx} = (\varphi\psi)(x),$$

які справджуються рівномірно відносно $x \in [0, 2\pi]$. Оскільки $\varphi\psi = \psi$ на $[c, d] \subset [0, 2\pi]$, то співвідношення (23) виконуються рівномірно відносно $x \in [c, d]$.

Теорема доведена.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Нахушев А.М.* О нелокальных краевых задачах со смещением и их связи с нагруженными уравнениями // Дифференц. уравнения. – 1985. – Т. 21, № 1. – С. 92–101.
2. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии. – М.: Высшая школа, 1995. – 301 с.
3. *Белавин И.А., Капица С.П., Курдюмов С.П.* Математическая модель глобальных демографических процессов с учетом пространственного распределения // Журн. вычислит. матем. и мат. физики. – 1988. – Т. 38, № 6. – С. 885–902.
4. *Майков А.Р., Поезд А.Д., Якунин С.А.* Экономический метод вычисления нестационарных нелокальных по времени условий излучения для волновых систем // Журн. вычислит. матем. и мат. физики. – 1990. – Т. 30, № 8. – С. 1267–1271.
5. *Дезин А.А.* Операторы с первой производной по "времени" и нелокальные граничные условия // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1967. – Т. 31, № 1. – С. 61–86.
6. *Мамян А.Х.* Общие граничные задачи в слое / ДАН СССР. – 1982. – Т. 267, № 2. – С. 292–296.

-
7. Горбачук В.И., Горбачук М.Л. Тригонометрические ряды и обобщенные периодические функции // Дан СССР. – 1981. – Т. 257, № 4. – С. 799–803.
 8. Горбачук В.И. О рядах Фурье периодических ультрараспределений // Укр. мат. журн. – 1982. – Т. 34, № 2. – С. 144–150.
 9. Бабенко К.И. Об одной новой проблеме квазианалитичности и о преобразовании Фурье целых функций / Труды Московского матем. общества. – 1956. – Т. 5. – С. 523–542.
 10. Городецький В.В. Задача Коші для еволюційних рівнянь нескінченного порядку. – Чернівці: Рута, 2005. – 291 с.
 11. Гельфанд И.М., Шиллов Г.Е. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1958. – 274 с.
 12. Городецький В.В. Множини початкових значень гладких розв'язків диференціально-операторних рівнянь параболічного типу. – Чернівці: Рута, 1998. – 219 с.
 13. Стейн И., Вейс. Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. – М.: Мир, 1974. – 334 с.