УДК 517.983

©2013 р. Лінчук Ю.С.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ДЕРИВАЦІЙНІ ПАРИ ОПЕРАТОРІВ У ПРОСТОРІ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ

Описано всі пари лінійних операторів, що діють у просторі цілих функцій і задовольняють співвідношення, яке є операторним аналогом рівняння Рубела в класі функціоналів.

We describe all pairs of linear operators that act in the spaces of entire functions and satisfy a relation that is an operator analog of the Rubel equation in the class of functionals.

Питання зображення лінійних функціоналів та операторів, що діють у різних просторах аналітичних функцій і задовольняють співвідношення, які в певному сенсі узагальнюють формулу диференціювання добутку двох функцій, вивчалися в роботах багатьох математиків.

Нехай G – довільна область комплексної площини і $\mathcal{H}(G)$ – простір усіх аналітичних в G функцій, що наділений топологією компактної збіжності [1]. В [2] Л.А. Рубел поставив і розв'язав задачу, про знаходження всіх пар лінійних неперервних функціоналів L та M на просторі $\mathcal{H}(G)$, які задовольняють співвідношення

$$L(fg) = L(f)M(g) + L(g)M(f) \qquad (1)$$

для довільних функцій f та g з простору $\mathcal{H}(G)$. Пізніше Н.Р. Нандакумар в [3] та Л. Зальцман в [4] різними способами розв'язали задачу Рубела в класі лінійних функціоналів на просторі $\mathcal{H}(G)$. Подальші дослідження стосовно опису пар лінійних функціоналів на просторі $\mathcal{H}(G)$, які задовольняють співвідношення, подібні до (1), здійснені в [5]–[6]. Ці результати та їх узагальнення систематизовані в [7]. Узагальнене рівняння Рубела було досліджене в [8].

Надалі в різних роботах розглядалися операторні модифікації співвідношення (1) в певних класах операторів, що діють у просторі $\mathcal{H}(G)$. В працях [9]-[10] доведено, що кожна деривація $D : \mathcal{H}(G) \to \mathcal{H}(G)$, тобто адитивний на $\mathcal{H}(G)$ оператор, який задовольняє співвідношення

$$D(fg) = fD(g) + gD(f)$$

для довільних двох функцій $f, g \in \mathcal{H}(G)$, має вигляд: $(Df)(z) = \varphi(z)f'(z)$, де φ – довільна функція з простору $\mathcal{H}(G)$. Зазначимо, що лінійним деиваціям на просторі неперервних функцій $C[0,1]$ присвячена робота [11].

Наступним етапом досліджень став розгляд певних мультиплікативних співвідношень для різних класів операторів, що діють у просторі $\mathcal{H}(G)$. В [12] Р. Баркел та С. Саекі описали всі адитивні оператори $T : \mathcal{H}(G_1) \to \mathcal{H}(G_2)$, які для деякої відмінної від сталої функції $\varphi \in \mathcal{H}(G_2)$ задовольняють співвідношення

$$T(zf) = \varphi T(f)$$

для довільної функції $f \in \mathcal{H}(G_1)$.

В роботі [13] Н.Р. Нандакумар описав всі адитивні оператори $M : \mathcal{H}(G) \to \mathcal{H}(G)$, які задовольнять співвідношення

$$M(fg) = M(f)M(g),$$

при цьому довівши, що кожен з таких операторів необхідно є лінійним і неперервним. В [14] він продовжив дослідження мультиплікативних співвідношень у випадку, коли $M : \mathcal{H}(G_1) \to \mathcal{H}(G_2)$.

Природним узагальненням наведених аспектів досліджень дериваційних співвідношень для функціоналів та операторів, що діють в різних просторах аналітичних функцій, є збільшення кількості невідомих операторів в операторних рівняннях. У зв'язку з цим виникає питання про знаходження всіх пар лінійних операторів A та B, які діють у просторі цілих функцій $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ і задовольняють операторне рівняння Рубела

$$(A(fg))(z) = (Af)(z)(Bg)(z) + (Ag)(z)(Bf)(z) \tag{2}$$

для довільних цілих функцій f та g. Зазначимо також, що всі розв'язки рівняння (2) в класі лінійних неперервних операторів на просторі $\mathcal{H}(G)$ були описані у [15].

Надалі нам знадобиться допоміжне твердження стосовно опису мультиплікативних лінійних операторів на просторі $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ (див., наприклад, [13]). Заради повноти, ми сформулюємо і наведемо нове доведення цього твердження.

Лема. *Для того, щоб лінійний на просторі $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ оператор A задовольняв співвідношення*

$$(A(fg))(z) = (Af)(z)(Ag)(z)$$

для довільних функцій f та g з простору $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ при $z \in \mathbb{C}$, необхідно і достатньо, щоб $A = 0$, або $Af = f \circ \psi$ для $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, де ψ – деяка функція з простору $\mathcal{H}(\mathbb{C})$.

Доведення. Нехай лінійний на просторі $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ оператор A задовольняє співвідношення леми. Надалі через $e(z)$ позначатимемо функцію $e(z) = z$. Для довільної точки $z \in \mathbb{C}$ формулою $L_z(f) = (Af)(z)$ визначається лінійний мультиплікативний функціонал L_z на $\mathcal{H}(\mathbb{C})$. Використовуючи опис лінійних мультиплікативних функціоналів на просторі $\mathcal{H}(\mathbb{C})$, (див., наприклад, [6]) одержуємо, що $L_z = 0$, або $L_z(f) = f(z_0)$, де $z_0 = L_z(e)$. Нехай $L_z \neq 0$ і $A(e) = \psi$. Тоді $z_0 = \psi(z)$, і тому $L_z(f) = f(\psi(z))$, тобто $(Af)(z) = f(\psi(z))$ для довільної функції $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

Нехай $U = \{z \in \mathbb{C} : L_z = 0\}$. Якщо $U = \mathbb{C}$, то $A = 0$. У випадку $U = \varnothing$ маємо, що $(Af)(z) = (f \circ \psi)(z)$ при $z \in \mathbb{C}$ для довільної функції $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, де ψ – деяка функція з простору $\mathcal{H}(\mathbb{C})$. Покажемо, що множина U може набувати лише два наведені вище значення. Дійсно, якби $U \neq \mathbb{C}$ і $U \neq \varnothing$, то для довільної функції $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ ми мали б, що

$$(Af)(z) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } z \in U; \\ f(\psi(z)), \text{ якщо } z \in \mathbb{C} \setminus U. \end{cases}$$

Якщо позначити $h(z) = A(1)$, то ми одержуємо, що функція $h(z)$ з простору $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ набуває лише два значення: 0 та 1, що неможливо. Необхідність умов леми доведено, а їх достатність є очевидною.

Нехай лінійні на просторі $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ оператори A та B задовольняють співвідношення (2). Позначимо $a(z) = A(1)$, $b(z) = B(1)$. Покладаючи в (2) $f = g = 1$, одержимо, що $a(z)(1 - 2b(z))) = 0$ при $z \in \mathbb{C}$. Оскільки функції $a(z)$ та $b(z)$ є цілими, то за теоремою єдиності для аналітичних функцій звідси випливає, що $b(z) \equiv \frac{1}{2}$ або $a(z) \equiv 0$ в $\mathbb{C}$.

Розглянемо спочатку випадок, коли $a(z) \not\equiv 0$ в $\mathbb{C}$. Тоді $b(z) \equiv \frac{1}{2}$ при $z \in \mathbb{C}$. Покладаючи в (2) $g(z) = 1$, одержимо, що $(Af)(z) = 2a(z)(Bf)(z)$ для довільної функції $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ при $z \in \mathbb{C}$. Тоді з (2) отримуємо, що $a(z)(2(B(fg)(z) - 4(Bf)(z)(Bg)(z)) = 0$ для довільних цілих функцій f та g при $z \in \mathbb{C}$. Оскільки $a(z) \not\equiv 0$ в G, то звідси випливає, що $2(B(fg))(z) = 2(Bf)(z)2(Bg)(z)$, $f, g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, $z \in \mathbb{C}$. Тоді $2B$ є ненульовим мультиплікативним оператором, який діє в просторі цілих функцій. За лемою одержуємо, що $B(f) = \frac{1}{2}(f \circ \psi)$, де ψ – деяка ціла функція. Тому $A(f) = a \cdot (f \circ \psi)$. Таким чином, у випадку, коли $a(z) \not\equiv 0$ в $\mathbb{C}$, пара операторів A та B визначається наступними формулами: $A(f) = a \cdot (f \circ \psi)$, $B(f) = \frac{1}{2}(f \circ \psi)$ де $a, \psi \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

Нехай тепер $a(z) \equiv 0$ в $\mathbb{C}$. Підставляючи у (2) $g = 1$, одержуємо, що $A = 0$ або $b(z) \equiv 1$ в $\mathbb{C}$. Якщо $A = 0$, то для будь-якого лінійного на просторі $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ оператора B пара операторів $A = 0$, B задовольняє співвідношення (2). Надалі вважатимемо, що $A \neq 0$. Тоді $b(z) \equiv 1$ в $\mathbb{C}$.

Отже, нехай $a(z) \equiv 0$ і $b(z) \equiv 1$ в $\mathbb{C}$. Візьмемо довільне $z \in \mathbb{C}$ і нехай $L_z(f) = (A(f))(z)$ і $M_z(f) = (B(f))(z)$. Тоді з (2) випливає, що пара лінійних функціоналів L_z та M_z задовольняє співвідношення

$$L_z(fg) = L_z(f)M_z(g) + L_z(g)M_z(f) \tag{3}$$

для довільних цілих функцій f та g. Крім того, $L_z(1) = 0$ і $M_z(1) = 1$. Тоді з [3] (див.

також [8]) випливає, що пара функціоналів L_z та M_z визначається однією із наступних трьох умов:

1) $L_z = 0$, M_z – довільний лінійний функціонал на $\mathcal{H}(\mathbb{C})$;

2) $L_z(f) = C\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}$, $M_z(f) = \frac{1}{2}(f(z_1) + f(z_2))$, де $C, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, причому $z_1 \neq z_2$;

3) $L_z(f) = Cf'(z_1)$, $M_z(f) = f(z_1)$, де $C, z_1 \in \mathbb{C}$.

Через S позначимо множину тих точок $z \in \mathbb{C}$, для яких пара функціоналів L_z та M_z визначаються формулами 1). Тоді $(Af)(z) = 0$ для довільної цілої функції f і для довільної точки $z \in S$. Через $Im(A)$ позначимо множину значень оператора A. Оскільки $A \neq 0$, то існує функція $\alpha \in Im(A)$, яка не дорівнює тотожному нулеві в $\mathbb{C}$. Тоді множина S є підмножиною множини нулів функції $\alpha(z)$ в $\mathbb{C}$. Тому множина S є не більш ніж зліченною і не має скінченних граничних точок. Для довільної точки z із S позначимо $m_z = \min\{m \in \mathbb{N} : g(z) = g'(z) = \ldots = g^{(m-1)}(z) = 0, \forall g \in Im(A)\}$. З визначення числа m_z випливає, що для кожної точки $z \in S$ існує функція $g_z \in Im(A)$, для якої $g_z^{(m_z)}(z) \neq 0$. Нехай h – довільна ціла функція, множина нулів якої збігається з множиною S, причому кратність довільного нуля $z \in S$ функції $h(z)$ дорівнює m_z. Функція h існує за теоремою Вейєрштрасса (див. [16], стор. 272). Для довільної цілої функції f функція $\frac{1}{h(z)}(Af)(z)$ є також цілою, оскільки кожна скінченна особлива точка цієї функції є усувною. Тому формулою $(A_1f)(z) = \frac{1}{h(z)}(Af)(z)$ визначається лінійний оператор A_1 на просторі $\mathcal{H}(\mathbb{C})$. Рівність (2) можна записати у вигляді

$$h(z)(A_1(fg))(z) =$$
$$= h(z)(A_1f)(z)(Bg)(z)+h(z)(A_1g)(z)(Bf)(z),$$

$f, g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, $z \in \mathbb{C}$. При $z \in \mathbb{C}\backslash S$ звідси випливає, що

$$(A_1(fg))(z) =$$
$$= (A_1f)(z)(Bg)(z) + (A_1g)(z)(Bf)(z) \quad (4)$$

для $f, g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Оскільки кожна точка з множини S є ізольованою, то співвідношення (4) є правильним для довільних функцій f та g із $H(\mathbb{C})$ при $z \in \mathbb{C}$. Для довільної точки $z \in G$ позначимо $L'_z(f) = (A_1(f))(z)$. Тоді з (4) випливає, що пара лінійних функціоналів L'_z та M_z задовольняє співвідношення виду (3), в якому L_z замінене на L'_z. Крім того, $L'_z(1) = 0$ і $M_z(1) = 1$. Оскільки для довільної точки $z \in \mathbb{C}$ функціонал $L'_z \neq 0$, то пара функціоналів L'_z та M_z визначаються однією з вищенаведених формул типу 2) або 3).

Через V позначимо множину тих точок $z \in \mathbb{C}$, для кожної з яких пара функціоналів L'_z та M_z визначається формулами виду 2). Нехай $V \neq \varnothing$ і $z \in V$. Тоді $L'_z(f) = C\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}$, $M_z(f) = \frac{1}{2}(f(z_1) + f(z_2))$, де $C, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Позначимо $A_1(e) = a_1$, $a_1 \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Тоді $C = L'_z(e) = a_1(z)$. Нехай $B(e) = b$ і $B(e^2) = b_1$, $b, b_1 \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Тоді $M_z(e) = b(z) = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$ і $M_z(e^2) = b_1(z) = \frac{1}{2}(z_1^2 + z_2^2)$. З цих рівностей знаходимо, що $z_1 = b(z) + \sqrt{b_1(z) - b^2(z)}$, $z_2 = b(z) - \sqrt{b_1(z) - b^2(z)}$, де розглядається одне із значень кореня $\sqrt{b_1(z) - b^2(z)}$. Нехай цілі функції u та v визначаються наступними формулами: $u(z) = b(z)$ і $v(z) = b_1(z) - b^2(z)$, $z \in \mathbb{C}$. Таким чином, одержуємо, що

$L'_z(f) = a_1(z)\frac{f\left(u(z)+\sqrt{v(z)}\right)-f\left(u(z)-\sqrt{v(z)}\right)}{2\sqrt{v(z)}}$,

$M_z(f) = \frac{f\left(u(z)+\sqrt{v(z)}\right)+f\left(u(z)-\sqrt{v(z)}\right)}{2}$.

Зауважимо, що $v(z) \neq 0$, оскільки $z \in V$.

Нехай $V \neq \mathbb{C}$ і $z \in \mathbb{C} \setminus V$. Тоді $L'_z(f) = Cf'(z_1)$ і $M_z(f) = f(z_1)$, де $z_1 \in \mathbb{C}$. Тому

$$L'_z(f) = a_1(z)f'(u(z)),$$
$$M_z(f) = f(u(z)),$$

де $a_1 = A_1(e)$, $u = B(e)$.

Позначимо $\varphi(z) = h(z)a_1(z)$, $z \in \mathbb{C}$. Враховуючи визначення функціоналів L'_z та M_z і те, що $(Af)(z) = h(z)(A_1f)(z)$, $z \in \mathbb{C}$, одержуємо, що для довільної функції $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$

$$(Af)(z) =$$
$$= \begin{cases} \varphi(z)\frac{f\left(u(z)+\sqrt{v(z)}\right)-f\left(u(z)-\sqrt{v(z)}\right)}{2\sqrt{v(z)}}, \text{при } z \in V, \\ \varphi(z)f'(u(z)), \text{при } z \in \mathbb{C} \setminus V; \end{cases} \quad (5)$$

$$(Bf)(z) =$$

$$= \begin{cases} \frac{f\left(u(z)+\sqrt{v(z)}\right)+f\left(u(z)-\sqrt{v(z)}\right)}{2}, \text{ при } z \in V, \\ f(u(z)), \text{ при } z \in \mathbb{C} \setminus V. \end{cases} \quad (6)$$

Оскільки $B(e^2) = b_1$, то з формули (6) випливає, що

$$b_1(z) = \begin{cases} u^2(z) + v(z), \text{ якщо } z \in V, \\ u^2(z), \text{ якщо } z \in \mathbb{C} \setminus V. \end{cases} \quad (7)$$

Функція b_1 є цілою, тому з (7) випливає, що множина $\mathbb{C} \setminus V$ збігається з множиною нулів функції $v(z)$.

Якщо ж $V = \varnothing$, то $v \equiv 0$ в $\mathbb{C}$, і з формул (5) та (6) випливає, що $A(f) = \varphi \cdot (f' \circ u)$, $B(f) = f \circ u$, де $\varphi, u \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

Таким чином, ми довели необхідність умов наступної теореми.

Теорема. *Для того, щоб лінійні на просторі $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ оператори A та B задовольняли співвідношення* (2), *необхідно і достатньо, щоб пара цих операторів визначалася однією з наступних умов:*

1) $A = 0$, B *– довільний лінійний оператор на* $\mathcal{H}(\mathbb{C})$;

2) $A(f) = \varphi \cdot (f \circ \psi)$; $B(f) = \frac{1}{2} f \circ \psi$, *де* $\varphi, \psi \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$;

3) $A(f) = \varphi \cdot (f' \circ \psi)$, $B(f) = f \circ \psi$, *де* $\varphi, \psi \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$;

4) *оператори A та B визначаються формулами* (5) *та* (6), *в яких* $\varphi, u, v \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, *причому* $v \not\equiv 0$, *а множина* $\mathbb{C} \setminus V$ *збігається з множиною нулів функції* $v(z)$.

Доведення. Достатність. Якщо оператори A та B визначаються однією з умов 1)–3) то вони лінійно діють у просторі $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ і задовольняють співвідношення (2). Нехай тепер оператори A та B визначаються умовою 4). Покажемо спочатку, що ці оператори діють в $\mathcal{H}(\mathbb{C})$. Доведення проведемо для оператора A. Для довільної цілої функції f при $z \in V$ маємо

$$(Af)(z) = \frac{\varphi(z)}{2\sqrt{v(z)}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \times$$

$$\times \left(\left(u(z) + \sqrt{v(z)}\right)^n - \left(u(z) - \sqrt{v(z)}\right)^n \right) =$$

$$= \frac{\varphi(z)}{2\sqrt{v(z)}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\sqrt{v(z)}\right)^k \times$$

$$\times u(z)^{n-k} (1 + (-1)^{k+1}) = \varphi(z) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \times$$

$$\times \sum_{l=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_n^{2l+1} \left(v(z)\right)^l \left(u(z)\right)^{n-2l-1}.$$

При $z \in \mathbb{C} \setminus V$ отримуємо, що

$$(Af)(z) = \varphi(z) f'(u(z)) =$$

$$= \varphi(z) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{(n-1)!} \left(u(z)\right)^{n-1}.$$

Оскільки $v(z) = 0$ при $z \in \mathbb{C} \setminus V$, то з цих рівностей одержуємо, що для довільної цілої функції f при $z \in \mathbb{C}$ маємо

$$(Af)(z) = \varphi(z) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \times$$

$$\times \sum_{l=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_n^{2l+1} \left(v(z)\right)^l \left(u(z)\right)^{n-2l-1}. \quad (8)$$

Покажемо, що оператор A діє в просторі $\mathcal{H}(\mathbb{C})$. Для цього достатньо перевірити, що для довільної функції $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ функція

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \times$$

$$\times \sum_{l=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_n^{2l+1} \left(v(z)\right)^l \left(u(z)\right)^{n-2l-1} \quad (9)$$

є цілою. Нехай r – довільне додатнє число. Позначимо $\max\limits_{|z|\le r} |v(z)| = a$, $\max\limits_{|z|\le r} |u(z)| = b$. Виберемо число c таким, щоб $c > a+b$. За нерівностями Коші для тейлорівських коефіцієнтів цілої функції $f(z)$, маємо що $\left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right| \le \frac{M(c)}{c^n}$, $n = 0, 1, \ldots$, де $M(c) = \max\limits_{|z|=c} |f(z)|$. Тому

$$\max_{|z|\le r} \left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \sum_{l=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_n^{2l+1} \left(v(z)\right)^l \left(u(z)\right)^{n-2l-1} \right| \le$$

$$\le \left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right| \sum_{l=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_n^{2l+1} a^l b^{n-2l-1} \le$$

$$\leq \frac{M(c)}{c^n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} = M(c)\left(\frac{a+b}{c}\right)^n,$$

$n = 1, 2, \ldots$. Оскільки $c > a+b$, то звідси випливає, що ряд в правій частині формули (9) збігається рівномірно в крузі $|z| \leq r$. В силу довільності r, одержуємо, що цей ряд збігається рівномірно на довільній компактній підмножині з $\mathbb{C}$. Оскільки u та v є цілими функціями, то за теоремою Вейєрштрасса про ряди з аналітичних функцій одержуємо, що функція $F(z)$, яка визначається формулою (9), є цілою. Тому оператор A діє в просторі $\mathcal{H}(\mathbb{C})$. Подібним чином переконуємося в тому, що оператор B також діє в $\mathcal{H}(\mathbb{C})$. Оператори A та B є лінійними. Безпосередньою перевіркою переконуємося в тому, що вони задовольняють співвідношення (2). Теорема доведена.

З доведеної теореми, наприклад, випливає, що для довільної цілої функції φ та довільної цілої функції v, яка не має нулів в $\mathbb{C}$, формулами

$$(Af)(z) = \varphi(z)\frac{f\left(u(z)+\sqrt{v(z)}\right)-f\left(u(z)-\sqrt{v(z)}\right)}{2\sqrt{v(z)}}$$

$$(Bf)(z) = \frac{f\left(u(z)+\sqrt{v(z)}\right)+f\left(u(z)-\sqrt{v(z)}\right)}{2}$$

визначаються лінійні на просторі $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ оператори A та B, які задовольняють (2).

Зауваження. *Оператори A та B, які визначаються однією з умов* 2)–4) *доведеної теореми, неперервно діють у просторі $\mathcal{H}(\mathbb{C})$. Тому множина розв'язків рівняння* (2) *в класі ненульових лінійних неперервних операторів, що діють у просторі $\mathcal{H}(\mathbb{C})$, описується однією із формул* 2)–4). *В іншій формі та іншим методом всі лінійні неперервні оператори A та B, що діють у просторі цілих функцій і задовольняють рівність* (2), *описані в* [15].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Köthe G.* Dualität in der Funktionentheorie // J. reine und angew. Math.–1953.–**191**.– P.30-49.

2. *L. A. Rubel* Derivation pairs on the holomorphic functions // Funk. Ekvac. – 1967. – №10. – P. 225-227.

3. *N. R. Nandakumar* A Note on Derivation Pairs // Proc. Amer. Math. Soc. – 1969. – №21. – P. 535–539.

4. *L. Zalcman* Derivation pairs on algebras of analytic functions // J. Func. Anal. – 1970. – **5**. – №3. – P. 329–333.

5. *N. R. Nandakumar* A note on the functional equation $M(fg) = M(f)M(g) + L(f)L(g)$ on $H(G)$ // Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari. – 1998. – **68**. – P. 13–17.

6. *Pl. Kannappan, N. R. Nandakumar* On a cosine functional equation for operators on the algebra of analytic functions in a domain // Aequationes Mathematicae – 2001.– **61.** – №3. – P. 233-238.

7. *Pl. Kannappan* Functional Equations and Inequalities with Applications, Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York, 2009. – 810 p.

8. *Лінчук Ю.С.* Узагальнене рівняння Рубела // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту. Математика. – 2011. – **1**. – №4. – С. 88-90.

9. *J. Becker* A note on derivations of algebras of analytic functions // J. Reine Angew. Math. – 1978. – **297**. – P. 211-213.

10. *N.R. Nandakumar* An application of Nienhuys-Thiemann s theorem to ring derivations on H(G) // Proc. Kon. Ned. Akad. van Wetensch – 1988. – **91**. – P. 199-203

11. *Y. Watatani* Derivations on continuous functions // Proc. Amer. Math. Soc. – 1980. – **79**. – №2. – P. 206

12. *R. B. Burckel, S. Saeki* Additive mappings on rings of holomorphic functions // Proc. Amer. Math. Soc. – 1983. – **89**. – №1. – P. 79-85

13. *N.R. Nandakumar* Ring homomorphisms on H(G) // Int. J. Math. Math. Sci. – 1990. – **13**. – №2. – P. 393-396.

14. *N.R. Nandakumar* Ring homomorphisms on algebras of analytic functions // Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska. – 1990. – **44**. – P. 37-43.

15. *Лінчук Ю.С.* Операторне узагальнення одного результата Рубела // Укр. мат. журнал.– 2011. – **63**. – №12.– С 1710-1716.

16. *А.И. Маркушевич* Теория аналитических функций. Том 2. – М.: Наука, 1968.– 624 с.