УДК 517.9

©2018 р. І.І. Клевчук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ІСНУВАННЯ ТА СТІЙКІСТЬ БІЖУЧИХ ХВИЛЬ У ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМАХ ІЗ МАЛОЮ ДИФУЗІЄЮ

Доведено існування періодичних розв'язків автономної параболічної системи диференціальних рівнянь з малою дифузією на колі. Вивчено питання існування та стійкості біжучих хвиль рівняння брюсселятора із малою дифузією.

Ключові слова: параболічна система, біфуркація, інтегральний многовид, стійкість, біжуча хвиля.

We prove the existence of periodic solutions in autonomous parabolic system of differential equations with weak diffusion on the circle. We consider the problem of existence and stability of traveling waves in the Brusselator equations with weak diffusion. We study the existence and stability of an arbitrarily large finite number of cycles for a parabolic system with weak diffusion.

Keywords: parabolic system, bifurcation, integral manifold, stability, traveling wave.

Для диференціальних рівнянь з частинними похідними можуть виникати складні просторові структури. У системах параболічних рівнянь із малою дифузією досліджено існування як завгодно великої кількості циклів (феномен буферності). Динаміка таких процесів досліджувалася у роботах А.Ю. Колєсова, Ю.С. Колєсова, Є.Ф. Міщенка, М.Х. Розова, В.А. Садовнічого, А.М. Самойленка, Є.П. Бєлана та інших. Такі математичні моделі описують складні фізичні явища.

Питання стійкості та біфуркації розв'язків диференціально-функціональних рівнянь, параболічних та гіперболічних систем з перетвореним аргументом розглядалися, зокрема, в [1 – 10]. У цій статті досліджено існування та стійкість як завгодно великого скінченного числа циклів параболічної системи із малою дифузією та рівняння брюсселятора із малою дифузією. Подібні задачі для диференціальних рівнянь з частинними похідними вивчалися, наприклад, у працях [1, 10 – 12].

1. Біжучі хвилі параболічних рівнянь із малою дифузією. Дослідимо біфуркацію як завгодно великої кількості циклів параболічних систем із малою дифузією. Розглянемо систему

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \varepsilon\gamma\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \varepsilon\delta\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \omega_0 u_2 + \varepsilon(\alpha u_1 - \beta u_2) + (d_0u_1 - c_0u_2)(u_1^2 + u_2^2),$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \varepsilon\gamma\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \varepsilon\delta\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \omega_0 u_1 + \varepsilon(\alpha u_2 + \beta u_1) + (d_0u_2 + c_0u_1)(u_1^2 + u_2^2) \qquad (1)$$

з періодичною умовою

$$u_1(t, x+2\pi) = u_1(t, x),\ u_2(t, x+2\pi) = u_2(t, x), \qquad (2)$$

де ε – малий додатний параметр, $\omega_0 > 0$, $\alpha > 0$, $\gamma > 0$, $d_0 < 0$.

Перейшовши до комплексних змінних $u = u_1 + iu_2$, $\bar{u} = u_1 - iu_2$, одержимо рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i\omega_0 u + \varepsilon\left[(\gamma + i\delta)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\alpha + i\beta)u\right] + (d_0 + ic_0)u^2\overline{u}. \qquad (3)$$

Дослідимо існування і стійкість хвильових розв'язків задачі (1), (2). Розв'язок рівняння (3) будемо шукати у вигляді біжучої хвилі $u = \theta(y)$, $y = \sigma t + x$, де функція $\theta(y)$ має період 2π. Тоді одержимо рівняння

$$\sigma\frac{d\theta}{dy} = i\omega_0\theta + \varepsilon\left[(\gamma + i\delta)\frac{d^2\theta}{dy^2} + (\alpha + i\beta)\theta\right] + (d_0 + ic_0)\theta^2\overline{\theta}.$$

Це рівняння заміною $\dfrac{d\theta}{dy} = \theta_1$ зведемо до вигляду

$$\frac{d\theta}{dy} = \theta_1, \quad \sigma\theta_1 = i\omega_0\theta + \varepsilon\left[(\gamma + i\delta)\frac{d\theta_1}{dy} + \right.$$

$$\left. +(\alpha + i\beta)\theta\right] + (d_0 + ic_0)\theta^2\overline{\theta}. \qquad (4)$$

Інтегральний многовид системи (4) можна зобразити у вигляді

$$\theta_1 = \frac{i\omega_0}{\sigma}\theta + \varepsilon\left[\frac{\alpha + i\beta}{\sigma}\theta - \frac{\omega_0^2}{\sigma^3}(\gamma + i\delta)\theta\right] +$$

$$+\frac{d_0 + ic_0}{\sigma}\theta^2\bar{\theta} + \ldots .$$

Тут у лінійних доданках збережено члени порядку $O(\varepsilon)$, а в нелінійних – $O(1)$. Рівняння на цьому многовиді набере вигляду

$$\frac{d\theta}{dy} = \frac{i\omega_0}{\sigma}\theta + \varepsilon\left[\frac{\alpha + i\beta}{\sigma}\theta - \frac{\omega_0^2}{\sigma^3}(\gamma + i\delta)\theta\right] +$$

$$+\frac{d_0 + ic_0}{\sigma}\theta^2\bar{\theta} + \ldots . \qquad (5)$$

Перейшовши у рівнянні (5) до полярних координат, $\theta = r\exp(i\varphi)$, одержимо рівняння

$$\frac{dr}{dy} = \varepsilon\left(\frac{\alpha}{\sigma} - \frac{\gamma}{\sigma^3}\omega_0^2\right)r + \frac{d_0}{\sigma}r^3. \qquad (6)$$

Нехай $d_0 < 0$ і виконується нерівність $\alpha > \dfrac{\gamma}{\sigma^2}\omega_0^2$. Тоді рівняння (6) має стаціонарний розв'язок

$$r = \sqrt{\varepsilon}R_0, \quad R_0 = \sqrt{\left(\alpha - \frac{\gamma}{\sigma^2}\omega_0^2\right)|d_0|^{-1}},$$

отже, періодичний розв'язок рівняння (5) має вигляд $\theta = \sqrt{\varepsilon}R_0\exp\left(\dfrac{i\omega_0}{\sigma}y\right) + O(\varepsilon)$. Враховуючи, що функція θ має період 2π, одержуємо $\sigma = \dfrac{\omega_0}{n} + O(\varepsilon)$, $n = \pm1, \pm2, \ldots$. Отже, періодичний розв'язок рівняння (3) має вигляд

$$u_n = u_n(t,x) = \sqrt{\varepsilon}r_n\exp(i(\chi_n(\varepsilon)t +$$

$$+nx)) + O(\varepsilon), \qquad (7)$$

де $r_n = \sqrt{(\alpha - n^2\gamma)\,|d_0|^{-1}}$, $\chi_n(\varepsilon) = \omega_0 + \varepsilon\beta + \varepsilon c_0 r_n^2 - \varepsilon\delta n^2$, $n \in \mathbb{Z}$. Тоді періодичний розв'язок задачі (1), (2) має вигляд

$$u_1 = \sqrt{\varepsilon}r_n\cos(\chi_n(\varepsilon)t + nx),$$

$$u_2 = \sqrt{\varepsilon}r_n\sin(\chi_n(\varepsilon)t + nx), \quad n \in \mathbb{Z}. \qquad (8)$$

Тому правильне наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай $\omega_0 > 0$, $\alpha > 0$, $\gamma > 0$, $d_0 < 0$ і для деякого цілого n виконується нерівність $\alpha > \gamma n^2$. Тоді знайдеться таке $\varepsilon_0 > 0$, що при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ задача (1), (2) має періодичні відносно t розв'язки (8).*

2. Стійкість періодичних розв'язків. Рівняння у варіаціях в околі розв'язку (7) рівняння (3) має вигляд

$$\frac{\partial v}{\partial t} = i\omega_0 v + \varepsilon\left[(\gamma + i\delta)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (\alpha + i\beta)v\right] +$$

$$+\varepsilon(d_0 + ic_0)(2r_n^2 v + w_n^2\bar{v}), \qquad (9)$$

де $w_n = r_n\exp(i(\chi_n(\varepsilon)t + nx))$, $\chi_n(\varepsilon) = \omega_0 + \varepsilon\beta + \varepsilon c_0 r_n^2 - \varepsilon\delta n^2$. Зробивши в рівнянні (9) заміну $v = w\exp(i\chi_n(\varepsilon)t)$, одержимо

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \varepsilon\left[(\gamma + i\delta)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (\alpha + i\delta n^2 + d_0 r_n^2)w + \right.$$

$$\left. +(d_0 + ic_0)r_n^2(w + \overline{w}\exp(2inx))\right]. \qquad (10)$$

Розв'язок рівняння (10) будемо шукати у вигляду ряду Фур'є в комплексній формі

$$w(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k(t)\exp(ikx),$$

$$\overline{w}(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k(t)\exp(ikx). \qquad (11)$$

Підставляючи (11) в (10) і зрівнюючи коефіцієнти при $\exp(ikx)$, одержимо рівняння відносно коефіцієнтів ряду Фур'є

$$\frac{dy_{k+n}}{dt} = \varepsilon[(\alpha + i\delta n^2 + d_0 r_n^2)y_{k+n} - (\gamma + i\delta)(k +$$

$$+n)^2 y_{k+n} + (d_0 + ic_0)r_n^2(y_{k+n} + v_{k-n})]. \qquad (12)$$

Аналогічно підставляючи (11) у спряжене до (10) рівняння, одержимо

$$\frac{dv_{k-n}}{dt} = \varepsilon[(\alpha - i\delta n^2 + d_0 r_n^2)v_{k-n} - (\gamma - i\delta)(k -$$

$$-n)^2 v_{k-n} + (d_0 - ic_0) r_n^2 (v_{k-n} + y_{k+n})]. \quad (13)$$

Стійкість хвильових розв'язків задачі (1), (2) визначається стійкістю системи (12), (13) з параметром $k \in \mathbb{Z}$. У системі (12), (13) зробимо заміну $y_{k+n} = z_{k+n} \exp(-2i\varepsilon\delta kn)$, $v_{k-n} = w_{k-n} \exp(-2i\varepsilon\delta kn)$. Тоді отримаємо лінійну систему з матрицею

$$\varepsilon A = \begin{pmatrix} \varepsilon a_{11} & \varepsilon a_{12} \\ \varepsilon a_{21} & \varepsilon a_{22} \end{pmatrix}.$$

Оскільки сума діагональних елементів матриці A від'ємна, $a = a_{11} + a_{22} < 0$, то для орбітальної експоненціальної стійкості хвильового розв'язку $u_n(t, x)$ необхідно і досить, щоб при $k \neq 0$ виконувалась умова $a^2 c > f^2$, де $c = Re(det(A))$, $f = Im(det(A))$, $f = 4\gamma kn(c_0 r_n^2 - \delta k^2)$, тобто

$$(d_0 r_n^2 - \gamma k^2)^2 (\gamma^2 k^2 + \delta^2 k^2 - 2\gamma d_0 r_n^2 - 4\gamma^2 n^2 -$$
$$-2\delta c_0 r_n^2) > 4\gamma^2 n^2 (c_0 r_n^2 - \delta k^2)^2, \quad (14)$$

де $r_n^2 = (\gamma n^2 - \alpha)/d_0$.

Теорема 2. *Біжучі хвилі $u_n(t, x)$ задачі (1), (2) експоненціально орбітально стійкі тоді і тільки тоді, коли виконується умова (14) при всіх $k \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$.*

Як приклад розглянемо рівняння (1), в якому $\delta = 0$, $\beta = 0$, $c_0 = 0$. Тоді з теореми 1 випливає, що при $d_0 < 0$, $\gamma n^2 < \alpha$ існує періодичний розв'язок

$$u_n = \sqrt{\varepsilon(\alpha - \gamma n^2)|d_0|^{-1}} \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t + nx) \\ \sin(\omega_0 t + nx) \end{pmatrix}.$$

Згідно з теоремою 2 біжучі хвилі $u_n(t, x)$ експоненціально орбітально стійкі тоді і тільки тоді, коли $n^2 < \dfrac{1}{6\gamma}(\gamma + 2\alpha)$.

3. Дослідження загальної параболічної системи із малою дифузією. Розглянемо систему

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_0 u + \varepsilon A_1 u + F(u) \quad (15)$$

з періодичною умовою

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x), \quad (16)$$

де ε – малий додатний параметр, $u \in \mathbb{R}^2$, функція $F(u, v)$ чотири рази неперервно диференційовна відносно своїх аргументів, $F(0, 0) = 0$, причому F має в нулі порядок малості вище першого, $A_0 a = i\omega_0 a$, $\omega_0 > 0$, $A_0^* b = -i\omega_0 b$, тут a і b – власні вектори матриць A_0 і A_0^* відповідно, для яких $(a, b) = 1$, $(\bar{a}, b) = 0$, матриця $A_0 + \varepsilon A_1$ має пару власних значень вигляду $\tau(\varepsilon) \pm i\omega(\varepsilon)$, $\tau(0) = 0$, $\tau'(0) > 0$, $\omega(0) = \omega_0$, $D = diag(d_1, d_2)$, $d_1 > 0$, $d_2 > 0$.

У системі (15) зробимо заміну $u = av + \bar{a}\bar{v}$ і домножимо обидві частини зліва на матрицю $\begin{pmatrix} \bar{b}_1 & \bar{b}_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$, та враховуючи, що $(a, b) = 1$, $(\bar{a}, b) = 0$, де $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, одержимо

$$\frac{\partial v}{\partial t} = i\omega_0 v + \varepsilon b^* D \frac{\partial^2 (av + \bar{a}\bar{v})}{\partial x^2} + \varepsilon b^* A_1 (av +$$
$$+\bar{a}\bar{v}) + b^* F(av + \bar{a}\bar{v}). \quad (17)$$

Нехай

$$b^* F(av + \bar{a}\bar{v}) = \sum_{2 \leq i+j \leq 3} f_{ij} \frac{v^i \bar{v}^j}{i! j!} + O(|v|^4).$$

У рівнянні (17) зробимо заміну

$$v = \xi + \sum_{2 \leq i+j \leq 3} \chi_{ij} \xi^i \bar{\xi}^j,$$

де $\chi_{21} = 0$, так, щоб звести його до нормальної форми

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = i\omega_0 \xi + \varepsilon b^* D \frac{\partial^2 (a\xi + \bar{a}\bar{\xi})}{\partial x^2} + \varepsilon b^* A_1 (a\xi +$$
$$+\bar{a}\bar{\xi}) + c_1 \xi |\xi|^2 \ldots. \quad (18)$$

Тут у лінійних доданках збережено члени порядку $O(\varepsilon)$, а в нелінійних – $O(1)$. При цьому для c_1 одержимо вираз

$$c_1 = \frac{i}{2\omega_0} \left(f_{20} f_{11} - 2|f_{11}|^2 - \frac{1}{3}|f_{02}|^2 \right) + \frac{f_{21}}{2}.$$

Дослідимо існування і стійкість хвильових розв'язків задачі (15), (16). Розв'язок рівняння (18) будемо шукати у вигляді біжучої хвилі $\xi = \theta(y)$, $y = \sigma t + x$, де функція $\theta(y)$ має період 2π. Тоді одержимо рівняння

$$\sigma \frac{d\theta}{dy} = i\omega_0 \theta + \varepsilon \Bigg[b^* D \frac{d^2 (a\theta + \bar{a}\bar{\theta})}{dy^2} + b^* A_1 (a\theta +$$

$$+\bar{a}\bar{\theta})\Bigg] + (d_0 + ic_0)\theta^2\overline{\theta}\ldots, \qquad (19)$$

де $c_1 = d_0 + ic_0$, $\{d_0, c_0\} \subset \mathbb{R}$. Це рівняння заміною $\dfrac{d\theta}{dy} = \theta_1$ зведемо до вигляду

$$\frac{d\theta}{dy} = \theta_1,\ \sigma\frac{d\theta}{dy} = i\omega_0\theta + \varepsilon\Bigg[b^*D\frac{d(a\theta_1 + \bar{a}\bar{\theta}_1)}{dy} +$$

$$+b^*A_1(a\theta + \bar{a}\bar{\theta})\Bigg] + (d_0 + ic_0)\theta^2\overline{\theta}\ldots. \qquad (20)$$

Інтегральний многовид системи (20) можна зобразити у вигляді

$$\theta_1 = \frac{i\omega_0}{\sigma}\theta + \frac{\varepsilon}{\sigma}\Bigg[b^*A_1(a\theta + \bar{a}\bar{\theta}) - \frac{\omega_0^2}{\sigma^2}b^*D(a\theta +$$

$$+\bar{a}\bar{\theta})\Bigg] + \frac{d_0 + ic_0}{\sigma}\theta^2\bar{\theta} + \ldots.$$

Рівняння на цьому многовиді набере вигляду

$$\frac{d\theta}{dy} = \frac{i\omega_0}{\sigma}\theta + \frac{\varepsilon}{\sigma}\Bigg[b^*A_1(a\theta + \bar{a}\bar{\theta}) - \frac{\omega_0^2}{\sigma^2}b^*D(a\theta +$$

$$+\bar{a}\bar{\theta})\Bigg] + \frac{d_0 + ic_0}{\sigma}\theta^2\bar{\theta} + \ldots.$$

У цьому рівнянні зробимо заміну $\theta = p\exp\left(\dfrac{i\omega_0}{\sigma}y\right)$ і усереднимо одержане рівняння відносно y [2]. Тоді одержимо автономне рівняння вигляду

$$\frac{dp}{dy} = \frac{\varepsilon}{\sigma}\left[(\alpha + i\beta)p - \frac{\omega_0^2}{\sigma^2}(\gamma + i\delta)p\right] +$$

$$+\frac{d_0 + ic_0}{\sigma}p^2\bar{p}, \qquad (21)$$

де $\alpha + i\beta = b^*A_1a$, $\gamma + i\delta = b^*Da$, $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} \subset \mathbb{R}$. Оскільки $(a, b) = 1$, $(\bar{a}, b) = 0$, то $\gamma = Re(b^*Da) = \dfrac{1}{2}(d_1 + d_2)$, $\alpha = \tau'(0) = Re(A_1a, b) > 0$.

Перейшовши у рівнянні (21) до полярних координат, $p = r\exp(i\varphi)$, одержимо рівняння

$$\frac{dr}{dy} = \varepsilon\left(\frac{\alpha}{\sigma} - \frac{\gamma}{\sigma^3}\omega_0^2\right)r + \frac{d_0}{\sigma}r^3. \qquad (22)$$

Нехай $d_0 < 0$ і виконується нерівність $\alpha > \dfrac{\gamma}{\sigma^2}\omega_0^2$. Тоді рівняння (22) має стаціонарний розв'язок

$$r = \sqrt{\varepsilon}R_0, \quad R_0 = \sqrt{\left(\alpha - \frac{\gamma}{\sigma^2}\omega_0^2\right)|d_0|^{-1}},$$

отже, періодичний розв'язок рівняння (19) має вигляд $\theta = \sqrt{\varepsilon}R_0\exp\left(\dfrac{i\omega_0}{\sigma}y\right) + O(\varepsilon)$. Враховуючи, що функція θ має період 2π, одержуємо $\sigma = \dfrac{\omega_0}{n} + O(\varepsilon)$, $n = \pm1, \pm2, \ldots$. Отже, періодичний розв'язок рівняння (18) має вигляд

$$\xi_n = \xi_n(t, x) = \sqrt{\varepsilon}r_n\exp(i(\chi_n(\varepsilon)t +$$

$$+nx)) + O(\varepsilon), \qquad (23)$$

де $r_n = \sqrt{(\alpha - n^2\gamma)|d_0|^{-1}}$, $\chi_n(\varepsilon) = \omega_0 + \varepsilon\beta + \varepsilon c_0r_n^2 - \varepsilon\delta n^2$, $n \in \mathbb{Z}$. Тоді періодичний розв'язок задачі (15), (16) має вигляд

$$u_1 = \sqrt{\varepsilon}r_n\cos(\chi_n(\varepsilon)t + nx) + O(\varepsilon),\ u_2 =$$

$$= \sqrt{\varepsilon}r_n\sin(\chi_n(\varepsilon)t + nx) + O(\varepsilon),\ n \in \mathbb{Z}. \quad (24)$$

Тому правильне наступне твердження.

Теорема 3. *Нехай $\omega_0 > 0$, $\alpha > 0$, $\gamma > 0$, $d_0 < 0$ і для деякого цілого n виконується нерівність $\alpha > \gamma n^2$. Тоді знайдеться таке $\varepsilon_0 > 0$, що при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ задача (15), (16) має періодичні відносно t розв'язки (24).*

Рівняння у варіаціях в околі розв'язку (23) рівняння (18) має вигляд

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = i\omega_0\zeta + \varepsilon\Bigg[b^*D\frac{\partial^2(a\zeta + \bar{a}\bar{\zeta})}{\partial x^2} + b^*A_1(a\zeta +$$

$$+\bar{a}\bar{\zeta})\Bigg] + \varepsilon(d_0 + ic_0)(2r_n^2\zeta + w_n^2\bar{\zeta}), \qquad (25)$$

де $w_n = r_n\exp(i(\chi_n(\varepsilon)t + nx))$, $\chi_n(\varepsilon) = \omega_0 + \varepsilon\beta + \varepsilon c_0r_n^2 - \varepsilon\delta n^2$.

Зробивши в рівнянні (25) заміну $\zeta = w\exp(i\chi_n(\varepsilon)t)$ і усереднивши одержане рівняння відносно t, одержимо рівняння вигляду (10), де $\alpha + i\beta = b^*A_1a$, $\gamma + i\delta = b^*Da$, $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} \subset \mathbb{R}$.

Використовуючи методику доведення теореми 2, встановлюємо правильність наступного твердження.

Теорема 4. *Біжучі хвилі $u_n(t,x)$ задачі (15), (16) експоненціально орбітально стійкі тоді і тільки тоді, коли виконується умова (14) при всіх $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.*

Для дослідження коливань брюсселятора із малою дифузією розглянемо систему

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = A - (B+1)u_1 + u_1^2 u_2 + \varepsilon d_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2},$$
$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = Bu_1 - u_1^2 u_2 + \varepsilon d_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \qquad (26)$$

з періодичною умовою

$$u_1(t, x+2\pi) = u_1(t,x),\ u_2(t,x+2\pi) = u_2(t,x),$$

де $B = 1 + A^2 + \varepsilon$, $d_1 > 0$, $d_2 > 0$, ε – малий додатний параметр.

У системі (26) зробимо заміну $u_1 = y_1 + A$, $u_2 = y_2 + B/A$ і одержану систему зведемо до вигляду (17), де

$$b^* F(av + \bar{a}\bar{v}) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{A} - A\right)(v+\bar{v})^2 +$$
$$+\frac{i}{2}\left(v^2 - \bar{v}^2\right) - \frac{1}{8}(v+\bar{v})^3 +$$
$$+\frac{i}{8A}(v+\bar{v})^2(v-\bar{v}) + O(\varepsilon),$$

$a_1 = A$, $a_2 = i - A$, $\overline{b_1} = \dfrac{i+A}{2iA}$, $\overline{b_2} = \dfrac{1}{2i}$.

Оскільки $f_{11} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{A} - A\right)$, $f_{02} = f_{11} - i$, $f_{20} = f_{11} + i$, $f_{21} = \dfrac{1}{4}\left(-3 + \dfrac{i}{A}\right)$, то згідно з біфуркаційними формулами знаходимо

$$c_1 = \frac{i}{2A}\left(f_{20}f_{11} - 2|f_{11}|^2 - \frac{1}{3}|f_{02}|^2\right) +$$
$$+\frac{f_{21}}{2} = -\left\{\frac{1}{4A^2} + \frac{1}{8} + \right.$$
$$\left. +i\left[\frac{1}{6A}\left(\frac{1}{A} - A\right)^2 + \frac{1}{24A}\right]\right\}.$$

Крім того, $\gamma = \dfrac{1}{2}(d_1 + d_2)$, $\alpha = \dfrac{1}{2}$.

Отже, якщо $1 > (d_1 + d_2)n^2$, то згідно з теоремою 3 періодичний розв'язок системи (26) можна записати у виляді $u_1 = A + z_1$, $u_2 = \dfrac{B}{A} - z_1 - \dfrac{1}{A}z_2$, де $z_1 + iz_2 = \sqrt{\varepsilon} r_n \exp(i(At + nx)) + O(\varepsilon)$, $r_n^2 = \dfrac{4A^2}{A^2+2}\left(1 - (d_1+d_2)n^2\right)$, $n \in \mathbb{Z}$. Умови стійкості можна одержати із нерівності (14).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Belan E.P., Samoilenko A.M.* Dynamics of periodic modes of the phenomenological equation of spin combustion // Ukrainian Mathematical Journal – 2013. – **65**, No. 1. – P. 21 – 46.

2. *Bogolyubov N.N., Mitropol'skii Yu.A.* Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations (in Russian). – Moscow: Nauka, 1974. – 502 p.

3. *Fodchuk V.I., Klevchuk I.I.* Integral sets and the reduction principle for differential-functional equations // Ukrainian Mathematical Journal – 1982. – **34**, No. 3. – P. 272 – 277.

4. *Hale J.K.* Theory of Functional Differential Equations. – Springer, New York, 1977.

5. *Klevchuk I.I., Fodchuk V.I.* Bifurcation of singular points of differential-functional equations // Ukrainian Mathematical Journal – 1986. – **38**, No. 3. – P. 281 – 286.

6. *Klevchuk I.I.* On the reduction principle for functional-differential equations of the neutral type // Differential Equations – 1999. – **35**, No. 4. – P. 464 – 473.

7. *Klevchuk I.I.* Homoclinic points for a singularly perturbed system of differential equations with delay // Ukrainian Mathematical Journal – 2002. – **54**, No. 4. – P. 693 – 699.

8. *Klevchuk I.I.* Bifurcation of the state of equilibrium in the system of nonlinear parabolic equations with transformed argument // Ukrainian Mathematical Journal – 1999. **51**, No. 10. – P. 1521 – 1524.

9. *Klevchuk I.I.* Existence of countably many cycles in hyperbolic systems of differential equations with transformed argument // Journal of Mathematical Sciences – 2016. **215**, No. 3. – P. 341 – 349.

10. *Klevchuk I.I.* Bifurcation of self-excited vibrations for parabolic systems with retarded argument and weak diffusion // Journal of Mathematical Sciences – 2017. **226**, No. 3. – P. 285 – 295.

11. *Mishchenko E.F., Sadovnichii V.A., Kolesov A.Yu., Rozov N.Kh.* Autowave Processes in Nonlinear Media with Diffusion (in Russian). – Fizmatlit, Moscow, 2005. – 430 p.

12. *Wu J.* Theory and applications of partial functional differential equation. – Springer, New York, 1996.