

ВЛАСТИВІСТЬ ЛОКАЛІЗАЦІЇ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛОКАЛЬНОЇ ЗА ЧАСОМ БАГАТОТОЧКОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ НЕСКІНЧЕННОГО ПОРЯДКУ

Доведено, що розв'язок нелокальної багатоточкової за часом задачі для еволюційного рівняння з оператором диференціювання нескінченного порядку має властивість локального посилення збіжності.

We prove that a solution of a nonlocal multipoint with respect to time problem for the evolution equation with differentiation operator of infinite order has the property of local strengthening of the convergence.

В [1] встановлено коректну розв'язність багатоточкової нелокальної за часом задачі для еволюційного рівняння з оператором диференціювання нескінченного порядку у класі крайових умов типу ультрарозподілів, тобто в класі узагальнених функцій, які є елементами простору $(S_{l_k}^{m_n})'$, топологічно спряженого до простору основних функцій $S_{l_k}^{m_n}$. Простори $S_{l_k}^{m_n}$ є узагальненнями просторів типу S (див. [2]) і будуються за числовими послідовностями $\{m_n\}$ та $\{l_k\}$, що задовольняють певні умови (простори типу S відповідають послідовностям $m_n = n^{n\beta}$, $l_k = k^{k\alpha}$, де $\alpha, \beta > 0$ – фіксовані параметри). Розв'язок $u(t, \cdot)$ багатоточкової задачі дається у вигляді згортки фундаментального розв'язку з граничною функцією $f \in (S_{l_k}^{m_n})'$; при цьому $u(t, \cdot) \in S_{l_k}^{m_n}$ при кожному $t \in (0, T]$, у той же час $u(t, \cdot)$ задовольняє відповідну крайову умову в сенсі узагальнених функцій, а саме, в просторі $(S_{l_k}^{m_n})'$ при наближенні t до нуля та фіксованих точок $\{t_1, \dots, t_m\} \subset (0, T]$. Природно виникає запитання: якщо узагальнена функція f збігається на деякій відкритій множині з гладкою функцією, то чи буде тоді відбуватися локальне посилення збіжності вказаного розв'язку (локальна рівномірна або поточкова збіжність розв'язку). Тут виділено клас $X' \subset (S_{l_k}^{m_n})'$ узагальнених функцій типу ультрарозподілів такий, що розв'язок багатоточкової задачі з граничною функцією

$f \in X'$ володіє властивістю локального покращення збіжності.

1. Попередні відомості та позначення

Розглянемо послідовність $\{m_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ додатних чисел, яка володіє наступними властивостями [2]:

- 1) $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0: m_n \leq m_{n+1}$;
- 2) $\forall \alpha > 0 \exists c_\alpha > 0 \forall n \in \mathbb{Z}_+: m_n \geq c_\alpha \cdot \alpha^n$;
- 3) $\exists M > 0 \exists h > 0 \forall n \in \mathbb{Z}_+: m_{n+1} \leq Mh^n m_n$;
- 4) $\exists \gamma > 0 \forall n \in \mathbb{Z}_+: m_n^2 \leq \gamma m_{n-1} \cdot m_{n+1}$;
- 5) $\exists A > 0 \exists L > 0 \forall \{n, l\} \subset \mathbb{Z}_+: m_n \cdot m_l \leq AL^{n+l} m_{n+l}$.

Поруч розглянемо послідовність $\{l_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ додатних чисел, яка також володіє властивостями 1)–5). Символом $S_{l_k}^{m_n}$ позначимо сукупність усіх функцій $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, котрі задовольняють умову

$$\exists c, A, B > 0 \forall \{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+ \forall x \in \mathbb{R} :$$

$$|x^k \varphi^{(n)}(x)| \leq c A^k B^n l_k m_n.$$

$S_{l_k}^{m_n}$ збігається з об'єднанням зліченно-нормованих просторів $S_{l_k, A}^{m_n, B}$ за всіма індексами $\{A, B\} \subset \mathbb{N}$, де символом $S_{l_k, A}^{m_n, B}$ позначено сукупність тих функцій $\varphi \in S_{l_k}^{m_n}$, котрі при довільних $\delta, \rho > 0$ задовольняють нерівності

$$|x^k \varphi^{(n)}(x)| \leq c_{\delta\rho} (A + \delta)^k (B + \rho)^n l_k m_n,$$

$$\{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R};$$

система норм в $S_{l_k, A}^{m_n, B}$ визначається за допомогою формул

$$\|\varphi\|_{\delta, \rho} = \sup_{x, k, n} \frac{|x^k \varphi^{(n)}(x)|}{(A + \delta)^k (B + \rho)^n l_k m_n},$$

$$\{\delta, \rho\} \subset \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}.$$

Якщо $m_n = n! \rho_n$, $\sqrt[n]{\rho_n} \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, то як доведено в [2], функція $\varphi \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R})$ належить до простору $S_{l_k}^{m_n}$ тоді й лише тоді, коли вона аналітично продовжується в комплексну площину до цілої функції $\varphi(z)$, $z \in \mathbb{C}$, яка задовольняє умову

$$\exists a, b, c > 0 \forall z = x + iy \in \mathbb{C} : |\varphi(z)| \leq c \gamma(ax) \rho(by), \quad (1)$$

де

$$\gamma(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ \inf_k (l_k / |x|^k), & |x| \geq 1, \end{cases}$$

$$\rho(y) = \begin{cases} 1, & |y| < 1, \\ \sup_n (|y|^n / m_n), & |y| \geq 1, \end{cases}$$

Зазначимо, що ρ – неперервно диференційовна, парна на $\mathbb{R}$ функція, яка монотонно зростає на проміжку $[1, +\infty)$, $\rho(x) \geq 1$, $x \in \mathbb{R}$; при цьому $\ln \rho$ – опукла на $(0, +\infty)$ функція [2], тобто

$$\forall \{y_1, y_2\} \subset (0, +\infty) : \ln \rho(y_1) + \ln \rho(y_2) \leq \ln \rho(y_1 + y_2). \quad (2)$$

Наприклад, якщо $m_n = n^{n\delta}$, $0 < \delta < 1$, $n \in \mathbb{Z}_+$, то $\rho(y) \sim \exp(|y|^{1/\delta})$.

Оскільки $\gamma(x) = 1/\tilde{\gamma}(x)$, де $\tilde{\gamma}(x) = 1$, $|x| < 1$ і $\tilde{\gamma}(x) = \sup_k (|x|^k / l_k)$, якщо $|x| > 1$, то γ – неперервно диференційовна, парна на $\mathbb{R}$ функція, яка монотонно спадає на проміжку $[1, +\infty)$, $0 < \gamma(x) \leq 1$, $x \in \mathbb{R}$. Наприклад, якщо $l_k = k^{k\alpha}$, то правильними є нерівності [3]:

$$\exp\left(-\frac{\alpha}{e}|x|^{1/\alpha}\right) \leq \gamma(x) \leq c \exp\left(-\frac{\alpha}{e}|x|^{1/\alpha}\right),$$

$$c = e^{\alpha/2}.$$

Функція $\ln \gamma$ задовольняє на $(0, +\infty)$ нерівність [2]

$$\ln \gamma(x_1) + \ln \gamma(x_2) \geq \ln \gamma(x_1 + x_2),$$

$$\{x_1, x_2\} \subset (0, +\infty). \quad (3)$$

У введених просторах $S_{l_k}^{m_n}$ визначені й обмежені (а, отже, і неперервні) лінійні оператори, важливі для аналізу; в першу чергу це оператори множення на x , на всі многочлени, на нескінченно диференційовні функції, які задовольняють певні умови (зокрема, на функції із вказаних просторів), оператори диференціювання, зсуву та розтягу.

Сукупність функцій, які є продовженнями функцій з простору $S_{l_k}^{m_n}$ в $\mathbb{C}$, позначимо символом $S_{l_k}^{m_n}(\mathbb{C})$. У просторі $S_{l_k}^{m_n}(\mathbb{C})$ можна ввести топологію індуктивної границі зліченно-нормованих просторів, при цьому, як випливає з (1) (див. також [2]) послідовність функцій $\{\varphi_\nu, \nu \geq 1\} \subset S_{l_k}^{m_n}$ збігається до нуля тоді й лише тоді, коли послідовність функцій $\{\varphi_\nu(z), \nu \geq 1\}$, $z \in \mathbb{C}$, рівномірно збігається до нуля в кожній обмеженій області комплексної площини $\mathbb{C}$, при цьому справджуються нерівності $|\varphi_\nu(z)| \leq c \gamma(ax) \rho(by)$, $z = x + iy \in \mathbb{C}$, зі сталими $c, a, b > 0$, не залежними від ν . Мультиплікатором у просторі $S_{l_k}^{m_n}(\mathbb{C})$ є кожна ціла функція $f(z)$, $z \in \mathbb{C}$, яка задовольняє умову:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists c_\varepsilon > 0 : |f(z)| \leq c_\varepsilon (\gamma(\varepsilon x))^{-1} \rho(\varepsilon y),$$

$$z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

Відповідно, функція $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, є мультиплікатором у просторі $S_{l_k}^{m_n}$.

Символом $(S_{l_k}^{m_n})'$ позначатимемо простір усіх лінійних неперервних функціоналів над відповідним простором основних функцій зі слабкою збіжністю, а його елементи називатимемо узагальненими функціями. Якщо $f \in (S_{l_k}^{m_n})'$, то до цього ж простору належить також кожна похідна $f^{(p)}$, $p \in \mathbb{N}$ (тобто елементи простору $(S_{l_k}^{m_n})'$ є нескінченно диференційовними), зсув $f(ay + b)$, $a \neq 0$, добуток αf , де α – мультиплікатор у просторі основних функцій.

Оскільки в основному просторі $S_{l_k}^{m_n}$ визначена операція зсуву аргументу T_x :

$\varphi(\xi) \rightarrow \varphi(\xi + x)$, то згортку узагальненої функції $f \in (S_{l_k}^{m_n})'$ з основною задамо формую

$$(f * \varphi)(x) := \langle f_\xi, T_{-x} \check{\varphi}(\xi) \rangle \equiv \langle f_\xi, \varphi(x - \xi) \rangle$$

(індекс ξ у f_ξ означає, що функціонал f діє на φ як функцію аргументу ξ , $\check{\varphi}(\xi) = \varphi(-\xi)$); при цьому $f * \varphi \in S_{l_k}^{m_n}$ для довільної функції $\varphi \in S_{l_k}^{m_n}$ і із співвідношення $\varphi_\nu \rightarrow 0$ при $\nu \rightarrow \infty$ за топологією простору $S_{l_k}^{m_n}$ випливає, що $f * \varphi_\nu \rightarrow 0$ при $\nu \rightarrow \infty$ за топологією простору $S_{l_k}^{m_n}$, то функціонал f називається згортувачем у просторі $S_{l_k}^{m_n}$.

Простори типу S тісно пов'язані між собою за допомогою перетворення Фур'є, а саме, правильною є формула [3]: $F[S_{l_k}^{m_n}] = S_{l_k}^{l_n}$. Оскільки кожний простір типу S разом з кожною функцією $\varphi(x)$ містить також функцію $\varphi(-x)$ і $F^{-1}[\varphi] = (2\pi)^{-1} F[\varphi(-\xi)]$, то у зв'язку з цим перетворення Фур'є узагальненої функції $f \in (S_{l_k}^{m_n})'$ визначимо за допомогою співвідношення

$$\langle F[f], \varphi \rangle = \langle f, F[\varphi] \rangle, \quad \forall \varphi \in S_{l_k}^{l_n},$$

при цьому $F[f] \in (S_{l_k}^{l_n})'$.

Якщо $f \in (S_{l_k}^{m_n})'$ – згортувач у просторі $S_{l_k}^{m_n}$, то для довільної функції $\varphi \in S_{l_k}^{m_n}$ правильною є формула [2]

$$F[f * \varphi] = F[f] \cdot F[\varphi].$$

Нехай $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, $z \in \mathbb{C}$, – деяка ціла функція. Говоритимемо, що в просторі $S_{l_k}^{l_n}(\mathbb{C})$ задано оператор диференціювання нескінченного порядку $g(D) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n (iD)^n$, $D = d/dz$, якщо для довільної функції $\varphi \in S_{l_k}^{l_n}(\mathbb{C})$ ряд

$$\psi(z) \equiv (g(D)\varphi)(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n (iD)^n \varphi(z), \quad z \in \mathbb{C},$$

зображає основну функцію з простору $S_{l_k}^{l_n}(\mathbb{C})$ (тут $\{l_n = n! \sqrt[n]{\rho_n}\}$ – послідовність, побудована вище). Звуження оператора $g(D)$ на простір $S_{l_k}^{l_n}$, яке позначатимемо символом A_g , називатимемо диференціальним оператором нескінченного порядку

в просторі $S_{l_k}^{l_n}$. Правильним є наступне твердження.

Теорема 1. Якщо ціла функція g – мультиплікатор у просторі $S_{l_k}^{l_n}(\mathbb{C})$, то в цьому просторі визначений і неперервний оператор $g(D)$, при цьому

$$(A_g \varphi)(x) = F^{-1}[g(\sigma) F[\varphi](\sigma)](x),$$

$$\{x, \sigma\} \subset \mathbb{R}, \quad \varphi \in S_{l_k}^{l_n}. \quad (4)$$

Доведення цієї теореми див. в [1].

Зауваження 1. Псевдодиференціальний оператор A_g визначений також у кожному просторі $S_{a_k}^{l_n}$, де $a_k \geq k! \rho_k$, $\sqrt[k]{\rho_k} \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, відображає цей простір в себе і є неперервним [1] (послідовності $\{l_n\}$ та $\{a_k\}$ задовольняють умови 1) – 5)).

2. Основні результати

Для еволюційного рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A_g u, \quad (t, x) \in (0, T] \times \mathbb{R} \equiv \Omega,$$

$$0 < T < \infty, \quad (5)$$

задамо багатоточкову нелокальну за часом задачу

$$\mu \lim_{t \rightarrow +0} u(t, \cdot) - \sum_{k=1}^m \mu_k \lim_{t \rightarrow t_k} u(t, \cdot) = f,$$

$$f \in (S_{a_k, *})', \quad a_k = k^{2k}, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad (6)$$

де $m \in \mathbb{N}$, $\{\mu, \mu_1, \dots, \mu_m\} \subset (0, \infty)$, $(t_1, \dots, t_m) \subset (0, T]$ – фіксовані числа, причому $\mu > \sum_{k=1}^m \mu_k$, $f \in S_{a_k}^{l_n}$, A_g – псевдодиференціальний оператор, який діє в просторі $S_{a_k}^{l_n}$, граничне співвідношення (6) розглядається в просторі $(S_{a_k}^{l_n})'$. Під розв'язком задачі (5), (6) розуміємо розв'язок $u \in C^1((0, T], S_{a_k}^{l_n})$ рівняння (5), який задовольняє граничну умову (6) у вказаному сенсі (в просторі $(S_{a_k}^{l_n})'$).

У праці [1] встановлено, що багатоточкова задача (5), (6) є коректно розв'язною. Розв'язок дається формулою $u(t, x) = f * G(t, x)$, $(t, x) \in \Omega$, де $G(t, x) = F^{-1}[Q(t, \sigma)](x)$,

$$Q(t, \sigma) =$$

$$= \exp\{tg(\sigma)\} \left(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k \exp\{t_k g(\sigma)\} \right)^{-1}.$$

G – фундаментальний розв’язок нелокальної багатоточкової за часом задачі для рівняння (5), (6).

Функція $G(t, \cdot)$ – ФРБЗ для рівняння (5) є неперервною абстрактною функцією параметра $t \in (0, T]$ із значеннями в просторі $S_{a_k}^{l_n}$ (див. лему 2.4 [1]). Оскільки гранична узагальнена функція f в (6) – згортувач у просторі $S_{a_k}^{l_n}$, а розв’язок $u(t, \cdot)$ задачі (5), (6) подається у вигляді згортки $f * G(t, \cdot)$, то звідси дістаємо, що граничні співвідношення

$$u(t, \cdot) = f * G(t, \cdot) \xrightarrow{t \rightarrow t_i} f * G(t_i, \cdot) = u(t_i, \cdot),$$

$$t_i \in (0, T], i \in \{1, \dots, m\},$$

справджуються в просторі $S_{a_k}^{l_n}$. Із означення збіжності в цьому просторі випливає, зокрема, що $u(t, \cdot) \rightarrow u(t_i, \cdot)$ при $t \rightarrow t_i$, $i \in \{1, \dots, m\}$, рівномірно на довільному відрізку $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Вказану збіжність в (6) погіршує перший доданок, оскільки для функції $G(t, \cdot)$ точка $t = 0$ є особливою. Однак виявляється, що якщо граничну функцію f брати з вузкого, ніж $(S_{a_k}^{l_n})'$ класу, то можна отримати локальне покращення збіжності згортки $f * G(t, \cdot)$ при $t \rightarrow +0$.

Для цього будемо розглядати узагальнені функції, задані на просторі основних функцій, який є неквазіаналітичним. Такий простір містить в собі нескінченно диференційовні фінітні функції. Зокрема, для довільних неперетинних проміжків $[a_1, b_1]$ та $[a_2, b_2]$ знайдеться основна функція, рівна одиниці на $[a_1, b_1]$ та нулевій на $[a_2, b_2]$ (див. [4]). Згідно з теоремою Карлемана-Островського [4] клас $S_{a_k}^{l_n}$, $a_k = k^{2k}$, $k \in \mathbb{Z}_+$ є неквазіаналітичним тоді й лише тоді, коли виконується умова

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln T(\lambda)}{\lambda^2} d\lambda < \infty, \quad T(\lambda) = \sup_{n \in \mathbb{Z}_+} \frac{\lambda^n}{l_n}. \quad (7)$$

Отже, надалі вважатимемо, що послідовність l_n , $n \in \mathbb{Z}_+$ така, що відповідна функція $T(\lambda)$ задовольняє умову (7). Тоді для

узагальненої функції $f \in (S_{a_k}^{l_n})'$, $\tilde{l}_n = l_n \cdot n^{2n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, є коректним поняттям співпадання f з гладкою функцією g (яку розуміємо як регулярний функціонал з простору $(S_{a_k}^{l_n})'$) на відкритій множині $Q \subset \mathbb{R}$ (при виконанні умови (7) клас $S_{a_k}^{l_n}$ є неквазіаналітичним). При обґрунтуванні властивості локалізації використовуватимемо наступне допоміжне твердження.

Лема 1. Якщо $x \neq 0$, то для функції $G(t, x)$ та її похідних справджуються оцінки

$$|D_x^m G(t, x)| \leq c B_0^q q^{2q} B^m l_m t^{q-m-1} |x|^{-q},$$

$$t \in (0, 1], m \in \mathbb{Z}_+, \quad (8)$$

де сталі c , B_0 , $B > 0$ не залежать від t , $q \in \mathbb{N}$ – довільно фіксоване.

Доведення. Оскільки

$$G(t, x) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} Q(t, \sigma) e^{-i\sigma x} d\sigma,$$

то покладемо $\sigma = t^{-1}y$. Тоді

$$G(t, x) = (2\pi)^{-1} t^{-1} \int_{\mathbb{R}} Q(t, t^{-1}y) e^{-it^{-1}xy} dy. \quad (9)$$

За умови $x \neq 0$ зінтегруємо q разів частинами інтеграл (9); у результаті знайдемо, що

$$G(t, x) = i^q (2\pi)^{-1} t^{q-1} x^{-q} \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}} D_y^q Q(t, t^{-1}y) e^{-it^{-1}xy} dy,$$

$$D_x^m G(t, x) = (-1)^m (2\pi)^{-1} i^{q+m} t^{q-m+1} \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}} y^m D_y^q Q(t, t^{-1}y) e^{-it^{-1}xy} dy, m \in \mathbb{N}.$$

Тоді

$$|D_x^m G(t, x)| \leq (2\pi)^{-1} t^{q-m-1} |x|^{-q} \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}} |y|^m |D_y^q Q(t, t^{-1}y)| dy.$$

Оскільки $Q(t, t^{-1}y) = Q_1(t, t^{-1}y) Q_2(t^{-1}y)$, то оцінка $|D_y^q Q(t, t^{-1}y)|$ зводиться до оцінок

функцій $|D_y^q Q_1(t, t^{-1}y)|$, $|D_y^q Q_2(t^{-1}y)|$. Повторюючи міркування, проведені при доведенні лем 2.1, 2.2 [1] знайдемо, що правильними є нерівності

$$\begin{aligned} |D_y^q Q_1(t, t^{-1}y)| &\leq c_1 b_1^q q! e^{-\ln \tilde{\gamma}(ay)}, \\ |D_y^q Q_2(t^{-1}y)| &\leq c_2 b_2^q q^{2q} e^{-\ln \tilde{\gamma}(at^{-1}y)} \leq c_2 b_2^q q^{2q}, \\ |D_y^q Q(t, t^{-1}y)| &\leq c B_0^q q^{2q} e^{-\ln \tilde{\gamma}(ay)}, \quad q \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (10)$$

де сталі c , B_0 , $a > 0$ не залежать від t . Урахувавши (10), прийдемо до нерівності

$$\begin{aligned} |D_x^m G(t, x)| &\leq \tilde{c} B_0^q q^{2q} t^{q-m-1} |x|^{-q} \times \\ &\times \int_{\mathbb{R}} |y|^m e^{-\ln \tilde{\gamma}(ay)} dy. \end{aligned}$$

Оскільки

$$\begin{aligned} &\exp\{-\ln \tilde{\gamma}(ay)\} \leq \\ &\leq \exp\left\{-\ln \tilde{\gamma}\left(\frac{a}{2}y\right)\right\} \exp\left\{-\ln \tilde{\gamma}\left(\frac{a}{2}y\right)\right\} \end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned} |y|^m \exp\left\{-\ln \tilde{\gamma}\left(\frac{a}{2}y\right)\right\} &= |y|^m \tilde{\gamma}\left(\frac{a}{2}y\right) = \\ &= |y|^m \inf_m \frac{l_m}{|\frac{a}{2}y|^m} \leq \left(\frac{a}{2}\right)^m l_m, \quad |y| \geq 1, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} |D_x^m G(t, x)| &\leq \tilde{c} B_0^q q^{2q} t^{q-m-1} |x|^{-q} B_1^m l_m \times \\ &\times \int_{\mathbb{R}} e^{-\ln \tilde{\gamma}(\frac{a}{2}y)} dy = \tilde{c} B_0^q q^{2q} t^{q-m-1} B_1^m l_m |x|^{-q}, \end{aligned}$$

$$m \in \mathbb{Z}_+, t \in (0, 1], x \neq 0,$$

$B_1 = 2/a$, сталі $\tilde{c}$, B_0 , $B_1 > 0$ не залежать від t .

Лема доведена.

Теорема 2. Нехай $f \in (S_{a_k, *})'$, $a_k = k^{2k}$, $\tilde{l}_n = l_n n^{2n}$, і $f = 0$ на інтервалі $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Тоді розв'язок задачі (5), (6) з граничною функцією f прямує до нуля при $t \rightarrow +0$ рівномірно на довільному відрізку $[c, d] \subset (a, b)$.

Доведення. Нехай $[c, d] \subset [a_1, b_1] \subset (a, b)$. Побудуємо функцію $\varphi \in S_{a_k}^{\tilde{l}_n}$ з носієм в (a, b) таку, що $\varphi = 1$ на $[a_1, b_1]$. Оскільки функції $\varphi(\cdot)T_{-x}\check{G}(t, \cdot)$, $(1-\varphi(\cdot))T_{-x}\check{G}(t, \cdot)$

при кожному $t > 0$ і $x \in \mathbb{R}$ належать до простору $S_{a_k}^{\tilde{l}_n}$, то правильним є співвідношення

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \langle f, \varphi(\cdot)T_{-x}\check{G}(t, \cdot) \rangle + \\ &+ \langle f, (1-\varphi(\cdot))T_{-x}\check{G}(t, \cdot) \rangle, \quad (t, x) \in \Omega. \end{aligned}$$

Узагальнена функція f дорівнює нулеві на (a, b) ,

$$\text{supp}(\varphi(\cdot)T_{-x}\check{G}(t, \cdot)) \subset (a, b)$$

тому з останнього співвідношення випливає, що

$$u(t, x) = t \langle f, t^{-1}\gamma(\cdot)T_{-x}\check{G}(t, \cdot) \rangle, \quad (t, x) \in \Omega,$$

де $\gamma = 1 - \varphi$.

Для доведення теореми досить встановити, що сім'я функцій $\Phi_{t,x}(\xi) = t^{-1}\gamma(\xi)T_{-x}\check{G}(t, \xi)$ обмежена в просторі $S_{a_k}^{\tilde{l}_n}$ рівномірно по t (для малих значень t) та $x \in [c, d]$, тобто, що

$$|\xi^k D_\xi^n \Phi_{t,x}(\xi)| \leq c A^k B^n k^{2k} \tilde{l}_n,$$

$$\{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+, \xi \in \mathbb{R}, \quad (11)$$

де сталі c , A , $B > 0$ не залежать від t , x , ξ , які змінюються вказаним способом. Оскільки $\Phi_{t,x}(\xi) = 0$ для $\xi \in [a_1, b_1]$, то оцінку (11) досить довести для $\xi \in \mathbb{R} \setminus [a_1, b_1]$.

Функція φ є елементом простору $S_{a_k}^{\tilde{l}_n}$. Отже,

$$|\xi^k D_\xi^n \varphi(\xi)| \leq c_1 A_1^k B_1^n k^{2k} \tilde{l}_n,$$

$$\{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+, \xi \in \mathbb{R}.$$

Скориставшись формулою диференціювання добутку двох функцій знайдемо, що

$$\begin{aligned} |\xi^k D_\xi^n \Phi_{t,x}(\xi)| &= t^{-1} \left| \xi^k \sum_{p=0}^n C_n^p D_\xi^p \varphi(\xi) \times \right. \\ &\times \gamma(\xi) D_\xi^{n-p} G(t, x - \xi) \Big| \leq \Psi_{t,x}^1(\xi) + \Psi_{t,x}^2(\xi), \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \Psi_{t,x}^1(\xi) &:= t^{-1} \sum_{p=0}^n C_n^p |\xi^k D_\xi^p \varphi(\xi)| \times \\ &\times |D_\xi^{n-p} G(t, x - \xi)|, \\ \Psi_{t,x}^2(\xi) &:= t^{-1} |\xi^k D_\xi^n G(t, x - \xi)|. \end{aligned}$$

Оцінимо $\Psi_{t,x}^1(\xi)$. Для цього скористаємося нерівностями (8); при оцінці $|D_\xi^{n-p}G(t, x - \xi)|$ в (8) покладемо $q = n - p + 2$; врахуємо також те, що $|x - \xi| \geq a_0 > 0$, де $a_0 = \min\{|a_1 - c|, |b - b_1|\}$. Отже,

$$\Psi_{t,x}^1(\xi) \leq cc_1 t^{-1} A_1^k k^{2k} \times \\ \times \sum_{p=0}^n C_n^p B_1^p \tilde{l}_p B_0^q q^{2q} B^{n-p} l_{n-p} t^{q-(n-p)-1} |x - \xi|^{-q}.$$

Оскільки $t^{q-(n-p)-1} = t$, $q = n - p + 2$, $0 \leq p \leq n$, $q^{2q} = (n - p + 2)^{2(n-p+2)} \leq b M^{n-p} (n - p)^{2(n-p)}$, $B_0^q = B_0^2 B_0^{n-p}$, $|x - \xi|^{-q} \leq a_0^q = (\frac{1}{a_0})^{n-p+2}$, $\tilde{l}_p \cdot \tilde{l}_{n-p} \leq N L^n \tilde{l}_n$ (див. п.1, властивість 5), де b, M, N, L – додатні сталі, то

$$\Psi_{t,x}^1(\xi) \leq \tilde{c} A_1^k k^{2k} \tilde{B}^n \sum_{p=0}^n C_n^p \tilde{l}_p l_{n-p} (n-p)^{2(n-p)} = \\ = \tilde{c} A_1^k k^{2k} \tilde{B}^n \sum_{p=0}^n C_n^p \tilde{l}_p \tilde{l}_{n-p} \leq \tilde{c} A_1^k k^{2k} \tilde{B}^n \tilde{l}_n, \quad (12)$$

де $\tilde{B} = 2\tilde{B}L = 2L \max\{B_1, B_0/a_0\}$, причому всі сталі не залежать від t, x, ξ , які змінюються вказаним способом.

Для оцінок $\Psi_{t,x}^2(\xi)$ скористаємося тим, що

$$\exists L_0 > 0 \forall x \in [c, d] \forall \xi \in \mathbb{R} \setminus [a_1, b_1] : \\ |\xi|/|x - \xi| \leq L_0.$$

Поклавши в (8) $q = n + 2 + k$ знайдемо, що

$$\Psi_{t,x}^2(\xi) \leq c t^{q-n-2} |\xi|^k |x - \xi|^{-q} B_0^q q^{2q} B^n l_n.$$

Далі знаходимо, що

$$q^{2q} = (n + 2 + k)^{2(n+2+k)} \leq \bar{c} \bar{A}^k \bar{B}^n k^{2k} n^{2n},$$

де $\bar{c}, \bar{A}, \bar{B}$ – додатні сталі,

$$|\xi|^k |x - \xi|^{-q} \leq \alpha_0 L_0^k a_1^n, \quad \alpha_0 = a_0^{-2}, \quad a_1 = a_0^{-1},$$

$$B_0^q = B_0^2 B_0^n B_0^k, \quad t^{q-n-2} = t^k \leq 1,$$

$$t \in (0, 1], \quad \{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+.$$

Отже,

$$\Psi_{t,x}^2(\xi) \leq \tilde{c} A_2^k B_2^n k^{2k} n^{2n} l_n = \bar{c} A_2^k B_2^n k^{2k} \tilde{l}_n, \quad (13)$$

де сталі $\bar{c}, A_2, B_2 > 0$ не залежать від t, x, ξ . З нерівностей (12), (13) випливає нерівність (11).

Теорема доведена.

Наслідок 1. Нехай $f \in (S_{a_k,*}^{\tilde{l}_n})' \subset (S_{a_k,*}^{l_n})'$, $u(t, x)$ – розв'язок задачі (5), (6) з граничною функцією f . Якщо $f = 0$ на інтервалі $(a, b) \subset \mathbb{R}$, то граничне співвідношення

$$\mu \lim_{t \rightarrow +0} u(t, x) - \mu_1 \lim_{t \rightarrow t_1} u(t, x) - \dots - \\ - \mu_m \lim_{t \rightarrow t_m} u(t, x) = 0$$

справджується рівномірно відносно x на довільному відрізку $[c, d] \subset (a, b)$.

Лема 2. Якщо функція-символ g задовольняє умову $g(0) = 0$, то $G(t, \cdot) \rightarrow (\mu - \tilde{\mu}_0)\delta$ при $t \rightarrow +0$ в просторі $(S_{a_k}^{l_n})'$ (тут

$$\tilde{\mu}_0 = \sum_{k=1}^m \mu_k).$$

Доведення. Якщо $g(0) = 0$, то $Q_1(t, 0) = 1$, $Q_2(0) = \left(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k\right)^{-1}$, тому з формули

$$\int_{\mathbb{R}} G(t, x) e^{ix\sigma} dx = Q_1(t, \sigma) Q_2(\sigma)$$

при $\sigma = 0$ дістаємо, що

$$\int_{\mathbb{R}} G(t, x) dx = (\mu - \tilde{\mu}_0)^{-1}, \quad t \in (0, T].$$

Тоді для довільної основної функції $\varphi \in S_{a_k}^{l_n}$

$$\left| \langle G(t, \cdot), g \rangle - \frac{\langle \delta, \varphi \rangle}{\mu - \tilde{\mu}_0} \right| = \\ = \left| \int_{\mathbb{R}} G(t, x) \varphi(x) dx - \frac{\varphi(0)}{\mu - \tilde{\mu}_0} \right| = \\ = \left| \int_{\mathbb{R}} G(t, x) \varphi(x) dx - \int_{\mathbb{R}} G(t, x) \varphi(0) dx \right| \leq \\ \leq \left| \int_{\mathbb{R}} |G(t, x)| \cdot |\varphi(x) - \varphi(0)| dx \right| \equiv J(t).$$

Для доведення твердження досить показати, що

$$\forall \varepsilon > 0 \exists t_0 = t_0(\varepsilon) > 0 \forall t : 0 < t < t_0 \Rightarrow$$

$$J(t) < \varepsilon.$$

Застосувавши формулу про скінченні прирости знайдемо, що $|\varphi(x) - \varphi(0)| \leq M|x|$, де $M = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi'(x)|$. Візьмемо ε з проміжку $(0, T)$ і покладемо $t_0 = \varepsilon$, $\delta_0 = t_0^{1/2}$. Тоді $|\varphi(x) - \varphi(0)| < M\varepsilon^{1/2}$, якщо лише $|x| < t_0^{1/2}$. Отже,

$$J(t) < \varepsilon^{1/2} \int_{|x| < \delta_0} |G(t, x)| dx + \int_{|x| \geq \delta_0} |G(t, x)| \times$$

$$\times |\varphi(x) - \varphi(0)| dx \equiv \varepsilon^{1/2} J_1(t) + J_2(t).$$

Оцінимо $J_1(t)$. Легко бачити, що

$$\begin{aligned} J_1(t) &\leq \int_{\mathbb{R}} |G(t, x)| dx = t \int_{\mathbb{R}} |G(t, ty)| dy = \\ &= t \int_{|y| < 1} |G(t, ty)| dy + \int_{|y| \geq 1} |G(t, ty)| dy \equiv \\ &\equiv J_1^1(t) + J_1^2(t). \end{aligned}$$

Для функції $G(t, ty)$ маємо наступне зображення:

$$\begin{aligned} G(t, ty) &= (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} e^{tg(\sigma)} Q_2(\sigma) e^{-ity\sigma} d\sigma \stackrel{t\sigma=\eta}{=} \\ &= (2\pi)^{-1} t^{-1} \int_{\mathbb{R}} e^{tg(t^{-1}\eta)} Q_2(t^{-1}\eta) e^{-iy\eta} d\eta. \end{aligned}$$

Оскільки

$$\begin{aligned} Q_2(t^{-1}y) &= \left(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k e^{t_k g(t^{-1}\eta)} \right)^{-1} \leq \\ &\leq \left(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k \right)^{-1} \end{aligned}$$

(див. доведення леми 2.2 [1]), то

$$\begin{aligned} |G(t, ty)| &\leq c_0 t^{-1} \int_{\mathbb{R}} e^{tg(t^{-1}\eta)} d\eta \leq \\ &\leq c_0 t^{-1} \int_{\mathbb{R}} e^{-t \ln \tilde{\gamma}(at^{-1}\eta)} d\eta \leq \\ &\leq c_0 t^{-1} \int_{\mathbb{R}} e^{-\ln \tilde{\gamma}(an)} d\eta = c_1 t^{-1}, \quad t \in (0, 1], \end{aligned}$$

де $c_0 = (2\pi)^{-1} \left(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k \right)^{-1}$. Отже, $J_1(t) \leq c_1$, стала $c_1 > 0$ не залежить від t .

Для того, щоб здійснити оцінку інтеграла $J_1^2(t)$, скористаємося нерівностями (8), де покладемо $m = 0$, $q = 2$. Тоді (8) стосовно функції $G(t, ty)$ набуває вигляду:

$$\begin{aligned} |G(t, ty)| &\leq \tilde{c} B_0^2 t |ty|^{-2} = \tilde{c} t^{-1} |y|^{-2}, \\ y &\neq 0, \quad 0 < t \leq 1. \end{aligned}$$

Звідси дістаємо, що

$$J_1^2(t) \leq \tilde{\beta} \int_{|y| \geq 1} y^{-2} dy = \beta', \quad t \in (0, 1].$$

Таким чином, $J_1(t) \leq d_0$, де стала $d_0 > 0$ не залежить від t .

Оцінимо $J_2(t)$. Передусім зазначимо, що $|\varphi(x) - \varphi(0)| \leq M_1$, де $M_1 = 2 \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)|$. Тоді

$$J_2(t) \leq M_1 \int_{|x| \geq t_0^{1/2}} |G(t, x)| dx.$$

Знову скориставшись нерівністю (8), де $m = 0$, $q = 2$ знайдемо, що

$$J_2(t) \leq 2\tilde{\beta} M_1 t \int_{t_0^{1/2}}^{+\infty} x^{-2} dx =$$

$$= \beta' t \cdot t_0^{-1/2} < \beta' t^{1/2} = \beta' \varepsilon^{1/2}$$

для всіх $t < t_0$. З отриманих для $J_1(t)$, $J_2(t)$ оцінок випливає, що

$$\forall \varepsilon \in (0, T) \exists t_0 = \varepsilon \forall t : 0 < t < t_0 \Rightarrow$$

$$J(t) < \text{const} \cdot \varepsilon^{1/2},$$

що й потрібно було довести.

Якщо $\varepsilon \geq T$, то за $t_0 = t_0(\varepsilon)$ можна взяти довільно фіксоване число з проміжку $(0, T)$.

Лема доведена.

Надалі вважатимемо, що оператор A_g в рівнянні (5) побудований за функцією g , яка задовольняє умову $g(0) = 0$.

Символом M_s позначатимемо клас функцій, які є мультиплікаторами в просторі $S_{a_k}^{ln}$.

Теорема 3. Властивість локалізації.

Нехай $f \in (S_{a_k,*}^{l_n})'$, $u(t, x)$ – розв’язок задачі (5), (6) з граничною функцією f . Якщо узгалянена функція f збігається на інтервалі $(a, b) \subset \mathbb{R}$ з функцією $\tilde{g} \in M_s$, то на довільному проміжку $[c, d] \subset (a, b)$ граничне співвідношення

$$\mu \lim_{t \rightarrow +0} u(t, x) - \mu_1 \lim_{t \rightarrow t_1} u(t, x) - \dots - \mu_m \lim_{t \rightarrow t_m} u(t, x) = \tilde{g}(x)$$

виконується рівномірно відносно x .

Доведення. Нехай $[c, d] \subset [a_1, b_1] \subset (a, b)$, φ – основна функція, побудована при доведенні теореми 2. Оскільки $\varphi(f - \tilde{g}) = 0$ на (a, b) , то $\varphi(f - \tilde{g}) = 0$ на $[c, d]$, $(1 - \varphi)f = 0$ на $[a_1, b_1]$ і за доведеним у теоремі 2 граничні співвідношення

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +0} \langle \varphi(f - \tilde{g}), T_{-x}\check{G}(t, \xi) \rangle &= 0, \\ \lim_{t \rightarrow +0} \langle (1 - \varphi)f, T_{-x}\check{G}(t, \xi) \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

справджуються рівномірно відносно $x \in [c, d]$.

Внаслідок властивості неперервності $G(t, \cdot)$ як абстрактної функції параметра t із значеннями в просторі $S_{a_k}^{l_n}$ граничні співвідношення

$$\sum_{k=1}^m \mu_k \lim_{t \rightarrow t_k} \langle \varphi(f - \tilde{g}), T_{-x}\check{G}(t, \xi) \rangle = 0, \quad (15)$$

$$\sum_{k=1}^m \mu_k \lim_{t \rightarrow t_k} \langle (1 - \varphi)f, T_{-x}\check{G}(t, \xi) \rangle = 0, \quad (16)$$

також виконуються рівномірно відносно $x \in [c, d]$. Крім того,

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \langle f, T_{-x}\check{G}(t, \cdot) \rangle = \\ &= \langle \varphi(f - \tilde{g}), T_{-x}\check{G}(t, \cdot) \rangle + \\ &+ \langle (1 - \varphi)f, T_{-x}\check{G}(t, \cdot) \rangle + \langle \varphi\tilde{g}, T_{-x}\check{G}(t, \cdot) \rangle, \end{aligned}$$

причому

$$\begin{aligned} \langle \varphi\tilde{g}, T_{-x}\check{G}(t, \cdot) \rangle &= \int_{\mathbb{R}} G(t, x - \xi) \varphi(\xi) \tilde{g}(\xi) d\xi = \\ &= \int_{\mathbb{R}} G(t, \xi) \varphi(x - \xi) \tilde{g}(x - \xi) d\xi \equiv J(t, x). \end{aligned}$$

Урахувавши співвідношення (14) – (16), лемму 2 та теорему 2.4 з [1] робимо висновок, що для доведення твердження досить встановити, що $J(t, x) \rightarrow (\mu - \tilde{\mu}_0)^{-1} \varphi(x) \tilde{g}(x)$ при $t \rightarrow +0$ рівномірно відносно $x \in [c, d]$, оскільки граничне співвідношення

$$\sum_{k=1}^m \mu_k \lim_{t \rightarrow t_k} J(t, x) = \frac{\tilde{\mu}_0}{\mu - \tilde{\mu}_0} (\varphi\tilde{g})(x)$$

виконується рівномірно відносно $x \in [c, d]$. Це випливає з того, що $J(t, x)$ подається у вигляді згортки $G(t, x) * (\varphi\tilde{g})(x)$, при цьому граничне співвідношення

$$\sum_{k=1}^m \mu_k \lim_{t \rightarrow t_k} G(t, x) = \sum_{k=1}^m \mu_k G(t_k, x)$$

виконується в просторі $S_{a_k}^{l_n}$ (зокрема, рівномірно на відрізку $[c, d]$), а $\varphi\tilde{g}$ – фінитна функція з простору $S_{a_k}^{l_n}$, яку можна розуміти як фінитний функціонал (згортувач у просторі $S_{a_k}^{l_n}$).

Доведення граничного співвідношення

$$J(t, \cdot) \xrightarrow{[c, d]} (\mu - \tilde{\mu}_0)^{-1} (\varphi\tilde{g})(\cdot), \quad t \rightarrow +0,$$

яке здійснюємо за схемою, використаною при доведенні леми 2, зводиться до оцінки інтегралів вигляду

$$\int_{|\varepsilon| < \delta} \Psi(t, \xi) d\xi, \quad \int_{|\varepsilon| \geq \delta} \Psi(t, \xi) d\xi,$$

де

$$\Psi(t, \xi) = |G(t, \xi)| \cdot |(\varphi\tilde{g})(x - \xi) - (\varphi\tilde{g})(x)|.$$

$\delta > 0$ шукаємо за довільно заданим $\varepsilon > 0$ так, що $|(\varphi\tilde{g})(x - \xi) - (\varphi\tilde{g})(x)| < \varepsilon$, якщо лише $|x| = |(x - \xi) - x| < \delta$. При оцінці вказаних інтегралів використовуємо нерівність $\int_{\mathbb{R}} |G(t, \xi)| d\xi \leq d_0$, де стала $d_0 > 0$ не залежить від t (див. доведення леми 2), а також те, що

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}, x \in [c, d]} |(\varphi\tilde{g})(x - \xi) - (\varphi\tilde{g})(x)| = M < +\infty.$$

Теорема доведена.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Городецкий В.В., Мартинюк О.В.* Нелокальні задачі для еволюційних рівнянь першого порядку за часовою змінною: Монографія. – Чернівці: Видавничий дім "РОДОВІД", 2013. – 352 с.
2. *Городецкий В.В., Мартинюк О.В.* Операторы обобщенного дифференцирования Гельфонда-Леонтьева в пространствах типа S // Сиб. мат. журн. – 2013. – Т. 54, № 3. – С. 569–584.
3. *Гельфанд И.М., Шиллов Г.Е.* Пространства основных и обобщенных функций. – М.: Физматгиз, 1958. – 307 с.
4. *Горбачук В.И., Горбачук М.Л.* Граничные значения решений дифференциально-операторных уравнений. – К.: Наук. думка, 1984. – 283 с.