Bukovinian Math. Journal. 2021, **9**, 1, 230–236 Буковинський матем. журнал 2021, Т.9, №1, 230–236

Лазурко В.І., Нестеренко В.В.

СИЛЬНА НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ

Вивчаються питання, які пов'язані з поняттям неперервності у сильному розумінні, у випадку функцій із значеннями в метричних просторах. Досліджено нарізні та сукупні властивості цього поняття, а також узагальнено кілька результатів з [9].

Ключові слова і фрази: сильна неперервність, сукупна неперервність, нарізна неперервність, майже неперервність, квазінеперервність, кліковість.

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine (Lazurko V.I.)
Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine (Nesterenko V.V.)
e-mail: *lazurkovera@gmail.com (Lazurko V.I.), v.nesterenko@chnu.edu.ua (Nesterenko V.V.)*

Вступ

Питання про взаємозв'язок між нарізними та сукупними властивостями неперервності вивчаються досить давно. Добре відомо, що нарізно неперервні функції не зобов'язані бути сукупно неперервними. Однак, це було так "добре відомо"не завжди. Навіть О.Коші в свій час вважав, що нарізно неперервні дійсні функції є сукупно неперервними. Про цю помилку Коші можна знайти відомості в [1, с. 952], [2, с. 115], і в коментованому перекладі [3, с. 29] "Cours d'Analyse а також у роботах [4], [5] та [6].

Деякі математики (див. [7] та [9]) схильні вважати, що насправді Коші не помилявся, а просто використовував інше поняття "нарізної неперервності". Так, в працях [7] та [9] виникло поняття неперервності в сильному розумінні. Нарізно неперервні функції в сильному розумінні вже є сукупно неперервними.

В цій роботі ми розглянемо поняття неперервності у сильному розумінні на випадок функцій із значеннями в метричних просторах, а також узагальнимо кілька результатів з [9].

1 Зв'язок сильної неперервності з неперервністю та майже неперервністю

Функція $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є *неперервною в сильному розумінні відносно x /y/ в точці* (x_0, y_0) [7], якщо

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} |f(x,y) - f(x_0,y)| = 0$$

УДК 517.51
2010 *Mathematics Subject Classification:* 54C05, 54C08.

$$\Big/ \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} |f(x,y) - f(x,y_0)| = 0 \Big/.$$

Функція f називається *неперервною в сильному розумінні відносно* x /y/, якщо вона є неперервною в сильному розумінні відносно x /y/ для всіх $(x,y) \in X \times Y$.

Далі у статті ми будемо вважати, що X і Y – довільні топологічні простори, а Z – метричний простір з метрикою d. Кажуть [8], що функція $f : X \times Y \to Z$ є *сильно неперервною відносно* x /y/ *в точці* $(x_0,y_0) \in X \times Y$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існують околи U точки x_0 в X та V точки y_0 в Y, такі, що $d(f(x,y), f(x_0,y)) < \varepsilon$ / $d(f(x,y), f(x,y_0)) < \varepsilon$/ для всіх $x \in U$ та $y \in V$. Функція f називається *сильно неперервною відносно* x /y/, якщо вона є такою в кожній точці $(x,y) \in X \times Y$. Функція f називається *сильно нарізно неперервною*, якщо вона є сильно неперервною відносно x і y.

Легко встановити, що для дійсних функцій від двох змінних поняття неперервності у сильному розумінні з [7] еквівалентне поняттю сильної неперервності відносно деякої змінної.

Очевидно, що кожна неперервна функція $f : X \times Y \to Z$ є сильно неперервною відносно x та y. Також, сильна неперервність функції f відносно x чи y гарантує неперервність f відносно x чи y відповідно. Таким чином, сильно нарізно неперервні функції є нарізно неперервними. В наступному пункті ми покажемо, що сильно нарізно неперервні функції є сукупно неперервними.

В роботі [1] було показано, що сильно нарізно неперервна функція від n дійсних змінних є сукупно неперервною. Ми перенесемо цей результат на випадок функцій зі значеннями у метричних просторах.

Теорема 1. *Нехай X та Y – топологічні простори, Z – метричний простір та функція $f : X \times Y \to Z$ – сильно неперервна відносно y в точці $(x_0,y_0) \in X \times Y$. Функція f неперервна за сукупністю змінних в точці (x_0,y_0) тоді і тільки тоді, коли f_{y_0} є неперервною в точці x_0.*

Доведення. Необхідність є очевидною.

Нехай функція $f : X \times Y \to Z$ – сильно неперервна відносно y в точці $(x_0,y_0) \in X \times Y$ і f^{x_0} є неперервною в точці y_0. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Оскільки f є сильно неперервною відносно y в точці (x_0,y_0), то існують околи U точки x_0 в X та V точки y_0 в Y, такі, що $d(f(x,y), f(x,y_0)) < \frac{\varepsilon}{2}$ для всіх $x \in X$ та $y \in Y$. З того, шо функція f_{y_0} є неперервною в точці x_0 випливає, що існує окіл U_1 точки x_0, такий, що $d(f(x,y_0), f(x_0,y_0)) < \frac{\varepsilon}{2}$ для всіх $x \in U_1$. Покладемо $U_0 = U \cap U_1$. Зауважимо, що U_0 є околом точки x_0. Розглянемо довільну точку $(x,y) \in U_0 \times V$. Тоді

$$d(f(x,y), f(x_0,y_0)) \le d(f(x,y), f(x,y_0)) + d(f(x,y_0), f(x_0,y_0)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким чином, для кожного $\varepsilon > 0$ ми маємо, що $d(f(x,y), f(x_0,y_0)) < \varepsilon$ для всіх $(x,y) \in U_0 \times V$. Це означає, що функція f є неперервною в точці (x_0,y_0). □

Наслідок 1. *Нехай X та Y – топологічні простори, Z – метричний простір та функція $f : X \times Y \to Z$ – сильно неперервна відносно y. Функція f неперервна за сукупністю змінних тоді і тільки тоді, коли f є неперервною відносно змінної x.*

Тепер ми отримуємо наступний наслідок, який вперше був встановлений в [10].

Наслідок 2. *Нехай X та Y – топологічні простори та Z – метричний простір. Функція $f : X \times Y \to Z$ – неперервна за сукупністю змінних тоді і тільки тоді, коли функція f сильно нарізно неперервна.*

Нагадаємо [12], що відображення $f : X \to Z$ називається *майже неперервним в точці* $x \in X$, якщо для довільного околу W точки $f(x) \in Z$ існує множина A в X, така, що $x \in int\overline{A}$ і $f(A) \subseteq W$, і просто *майже неперервним*, якщо воно є таким в кожній точці $x \in X$.

Має місце наступний результат.

Теорема 2. *Нехай X та Y – топологічні простори, Z – метричний простір та функція $f : X \times Y \to Z$ – сильно неперервна відносно y в точці $(x_0, y_0) \in X \times Y$. Функція f майже неперервна за сукупністю змінних в точці (x_0, y_0) тоді і тільки тоді, коли f_{y_0} є майже неперервною в точці x_0.*

Доведення. Нехай f є майже неперервною за сукупністю змінних в точці (x_0, y_0). Візьмемо $\varepsilon > 0$. Оскільки функція f сильно неперервна відносно y в точці (x_0, y_0), то існують околи U точки x_0 в X та V точки y_0 в Y, такі, що що $d(f(x, y), f(x, y_0)) < \frac{\varepsilon}{2}$ для всіх $x \in U$ та $y \in V$. З сукупної майже неперервності функції f в точці (x_0, y_0) випливає, що існує множина A в $X \times Y$, така, що $(x_0, y_0) \in int\overline{A}$ і $d(f(x, y), f(x_0, y_0)) < \frac{\varepsilon}{2}$ для всіх $(x, y) \in A$. Без обмеження загальності, ми можемо вважати, що $A \subseteq U \times V$. Позначимо через A_X проекцію множини A на X. Оскільки $(x_0, y_0) \in int\overline{A}$, то $x_0 \in int\overline{A_X}$. Тоді для довільної точки $x \in A_X$ існує точка $y \in V$, така, що $(x, y) \in A$ і ми одержуємо

$$d(f_{y_0}(x), f_{y_0}(x_0)) = d(f(x, y_0), f(x_0, y_0)) \leq d(f(x, y_0), f(x, y))+$$
$$+d(f(x, y), f(x_0, y_0)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Отже, для довільного $\varepsilon > 0$ існує множина A_X в X, така, що $x_0 \in int\overline{A_X}$ і $d(f_{y_0}(x), f_{y_0}(x_0)) < \varepsilon$ для всіх $x \in A_X$. Це означає, що функція f_{y_0} є майже неперервною в точці x_0.

Навпаки, нехай функція f_{y_0} є майже неперервною в точці x_0. Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$. Оскільки функція f сильно неперервна відносно y в точці (x_0, y_0), то існують околи U точки x_0 в X та V точки y_0 в Y, такі, що що $d(f(x, y), f(x, y_0)) < \frac{\varepsilon}{2}$ для всіх $x \in U$ та $y \in V$. Оскільки функція f_{y_0} є майже неперервною в точці x_0, то існує множина A в X, така, що $x_0 \in int\overline{A}$ і $d(f_{y_0}(x), f_{y_0}(x_0)) < \frac{\varepsilon}{2}$ для всіх $x \in A$. Без обмеження загальності, ми можемо вважати, що $A \subseteq U$. Зауважимо, що $(x_0, y_0) \in int\overline{A \times V}$. Розглянемо довільну точку $(x, y) \in A \times V$. Тоді

$$d(f(x, y), f(x_0, y_0)) \leq d(f(x, y), f(x, y_0)) + d(f(x, y_0), f(x_0, y_0)) <$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Це означає, що f є майже неперервною за сукупністю змінних в точці (x_0, y_0). □

Наслідок 3. *Нехай X та Y – топологічні простори, Z – метричний простір та функція $f : X \times Y \to Z$ – сильно неперервна відносно y. Функція f майже неперервна за сукупністю змінних тоді і тільки тоді, коли f є майже неперервною відносно x.*

2 Зв'язок сильної неперервності з квазінеперервністю та кліковістю

Нагадаємо [11], що для топологічних просторів X та Z відображення $f : X \to Z$ називається *квазінеперервним в точці* $x_0 \in X$, якщо для довільного околу W точки $f(x_0)$ в просторі Z та довільного околу U точки x_0 в просторі X існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $G \subseteq U$ і $f(G) \subseteq W$, і просто *квазінеперервним*, якщо вона є квазінеперервним в кожній точці $x \in X$.

Наступний результат є узагальненням відповідної теореми з [9].

Теорема 3. *Нехай X та Y – топологічні простори, Z – метричний простір та функція $f : X \times Y \to Z$ – сильно неперервна відносно y в точці $(x_0, y_0) \in X \times Y$. Функція f квазінеперервна за сукупністю змінних в точці (x_0, y_0) тоді і тільки тоді, коли f_{y_0} є квазінеперервною в точці x_0.*

Доведення. Нехай f є квазінеперервною за сукупністю змінних в точці (x_0, y_0). Візьмемо $\varepsilon > 0$ та окіл U точки x_0 в X. Оскільки функція f сильно неперервна відносно y в точці (x_0, y_0), то існують околи U_1 точки x_0 в X та V точки y_0 в Y, такі, що що $d(f(x, y), f(x, y_0)) < \frac{\varepsilon}{2}$ для всіх $x \in U_1$ та $y \in V$. Покладемо $U_2 = U \cap U_1$. Зауважимо, що U_2 є околом точки x_0. З сукупної квазінеперервності функції f в точці (x_0, y_0) випливає, що існують відкриті непорожні множини G в X та H в Y, такі, що $G \subseteq U_2$, $H \subseteq V$ і $d(f(x, y), f(x_0, y_0)) < \frac{\varepsilon}{2}$ для всіх $x \in G$ та $y \in H$. Тоді для довільної точки $x \in G$ та довільної точки $y \in H$ маємо, що

$$d(f_{y_0}(x), f_{y_0}(x_0)) = d(f(x, y_0), f(x_0, y_0)) \leq d(f(x, y_0), f(x, y)) +$$
$$+ d(f(x, y), f(x_0, y_0)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Отже, для довільного $\varepsilon > 0$ та довільного околу U точки x_0 в X існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $G \subseteq U$ і $d(f_{y_0}(x), f_{y_0}(x_0)) < \varepsilon$ для всіх $x \in G$. Це означає, що функція f_{y_0} є квазінеперервною в точці x_0.

Навпаки, нехай функція f_{y_0} є квазінеперервною в точці x_0. Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$ та довільні околи U точки x_0 в X та V точки y_0 в Y. Оскільки функція f сильно неперервна відносно y в точці (x_0, y_0), то існують околи U_1 точки x_0 в X та V_1 точки y_0 в Y, такі, що що $d(f(x, y), f(x, y_0)) < \frac{\varepsilon}{2}$ для всіх $x \in U_1$ та $y \in V_1$. Покладемо $U_2 = U_1 \cap U$ та $H = int(V_1 \cap V)$. Зауважимо, що U_2 – це окіл точки x_0 в X та H – відкрита непорожня множина в Y. Оскільки функція f_{y_0} є квазінеперервною в точці x_0, то існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $d(f_{y_0}(x), f_{y_0}(x_0)) < \frac{\varepsilon}{2}$ для всіх $x \in G$. Розглянемо довільну точку $(x, y) \in G \times H$. Тоді

$$d(f(x, y), f(x_0, y_0)) \leq d(f(x, y), f(x, y_0)) + d(f(x, y_0), f(x_0, y_0)) <$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Це означає, що f є квазінеперервною за сукупністю змінних в точці (x_0, y_0). □

Наслідок 4. *Нехай X та Y – топологічні простори, Z – метричний простір та функція $f : X \times Y \to Z$ – сильно неперервна відносно y. Функція f квазінеперервна за сукупністю змінних тоді і тільки тоді, коли f є квазінеперервною відносно x.*

Для метричного простору (Z, d) функція $f : X \to Z$ називається *кліковою в точці* $x \in X$ [13], якщо для довільного $\varepsilon > 0$ і довільного околу U точки x в X існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $G \subseteq U$ і $d(f(x), f(x')) < \varepsilon$ для всіх $x' \in G$. Функція називається *кліковою*, якщо вона є такою в кожній точці.

Теорема 4. *Нехай X та Y – топологічні простори, Z – метричний простір та функція $f : X \times Y \to Z$ – сильно неперервна відносно y в точці $(x_0, y_0) \in X \times Y$. Функція f клікова за сукупністю змінних в точці (x_0, y_0) тоді і тільки тоді, коли f_{y_0} є кліковою в точці x_0.*

Доведення. Нехай f є кліковою за сукупністю змінних в точці (x_0, y_0). Візьмемо $\varepsilon > 0$ та окіл U точки x_0 в X. Оскільки функція f сильно неперервна відносно y в точці (x_0, y_0), то існують околи U_1 точки x_0 в X та V точки y_0 в Y, такі, що що $d(f(x, y), f(x, y_0)) < \frac{\varepsilon}{3}$ для всіх $x \in U_1$ та $y \in V$. Покладемо $U_2 = U \cap U_1$. Зауважимо, що U_2 є околом точки x_0. З сукупної кліковості функції f в точці (x_0, y_0) випливає, що існують відкриті непорожні множини G в X та H в Y, такі, що $G \subseteq U_2$, $H \subseteq V$ і $d(f(x, y), f(x', y')) < \frac{\varepsilon}{3}$ для всіх $x, x' \in G$ та $y, y' \in H$. Тоді для довільних точок $x, x' \in G$ та довільної точки $y \in H$ маємо, що

$$d(f_{y_0}(x), f_{y_0}(x')) = d(f(x, y_0), f(x', y_0)) \leq d(f(x, y_0), f(x, y)) +$$

$$+ d(f(x, y), f(x', y)) + d(f(x', y), f(x', y_0)) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Отже, для довільного $\varepsilon > 0$ та довільного околу U точки x_0 в X існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $G \subseteq U$ і $d(f_{y_0}(x), f_{y_0}(x')) < \varepsilon$ для всіх $x, x' \in G$. Це означає, що функція f_{y_0} є кліковою в точці x_0.

Навпаки, нехай функція f_{y_0} є кліковою в точці x_0. Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$ та довільні околи U точки x_0 в X та V точки y_0 в Y. Оскільки функція f сильно неперервна відносно y в точці (x_0, y_0), то існують околи U_1 точки x_0 в X та V_1 точки y_0 в Y, такі, що що $d(f(x, y), f(x, y_0)) < \frac{\varepsilon}{3}$ для всіх $x \in U_1$ та $y \in V_1$. Покладемо $U_2 = U_1 \cap U$ та $H = int(V_1 \cap V)$. Зауважимо, що U_2 – це окіл точки x_0 в X та H – відкрита непорожня множина в Y. Оскільки функція f_{y_0} є кліковою в точці x_0, то існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $G \subseteq U_2$ і $d(f_{y_0}(x), f_{y_0}(x')) < \frac{\varepsilon}{3}$ для всіх $x, x' \in G$. Розглянемо довільні точки $(x, y), (x', y') \in G \times H$. Тоді

$$d(f(x, y), f(x', y')) \leq d(f(x, y), f(x, y_0)) + d(f(x, y_0), f(x', y_0)) + d(f(x', y_0), f(x', y')) <$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Це означає, що f є кліковою за сукупністю змінних в точці (x_0, y_0). □

Наслідок 5. *Нехай X та Y – топологічні простори, Z – метричний простір та функція $f : X \times Y \to Z$ – сильно неперервна відносно y. Функція f клікова за сукупністю змінних тоді і тільки тоді, коли f є кліковою відносно x.*

Автори дякують рецензентові за вагомі зауваження, які допомогли суттєво покращити цю статтю.

Список літератури

[1] Kershner R. *The Continuity of Functions of Many Variables.* Trans. Amer. Math. Soc., 1943, **53**, 83 – 100.

[2] Piotrowski Z. *The genesis of separate versus joint continuity.* Tatra Mountains Math. Publ., 1996, **8**, 113 – 126.

[3] Bradley R. E., Sandifer C. E. *Cauchy's Cours d'analyse. An Annotated Translation.* Springer, 2009.

[4] Jarnicki M., Pflug P. *Directional vs. Joint Regularity.* Notices Amer. Math. Soc., 2011, **58**, 896 – 904.

[5] Ciesielski K.C., Glatzer T. *Sets of Discontinuities of Linearly Continuous Functions.* Real Anal. Exchange, 2013, **38**, 2, (2013), 337 – 389.

[6] Ciesielski K.C., Glatzer T. *Sets of discontinuities for functions continuous on flats.* Real Anal. Exchange, 2014, **39**, 1, 117 – 138.

[7] Dzagnidze O. *Separately Continuous Functions in a New Sense are Continuous.* Real Analysis Exchange, 1998, **24**, 2, 695 - 702.

[8] Karlova O. *Some properties of strongly disjoint continuous functions on products.* Bukovynian Mathematical Journal, 2014, **2**, (2-3), 119 – 125.

[9] Russell W. *Strong Continuity on Product Spaces.* Youngstown State University, 2009, 1 - 23.

[10] Karlova O. *The Baire classification of strongly separately continuous functions.* Real Anal. Exch., 2015. **40**, 2, 371 - 382.

[11] Breckenridge J. *Partial continuity, quasicontinuity, and Baire spaces* Bull. Inst. Math. Acad. Sinica., 1976. **4**, 191 – 203.

[12] Husain T. *Some remarks about real almost continuous functions.* Math. Mag., 1967. **40**, 250 - 254.

[13] Thielman H.P. *Types of functions.* Amer. Math. Monthly., 1953. **60**, 156 - 161.

Надійшло 05.04.2021

Lazurko V.I., Nesterenko V.V. *Strong continuity of functions from two variables*, Bukovinian Math. Journal. **9**, 1 (2021), 230–236.

The concept of continuity in a strong sense for the case of functions with values in metric spaces is studied. The separate and joint properties of this concept are investigated, and several results by Russell are generalized.

A function $f : X \times Y \to Z$ is strongly continuous with respect to x $/y/$ at a point $(x_0, y_0) \in X \times Y$ provided for an arbitrary $\varepsilon > 0$ there are neighborhoods U of x_0 in X and V of y_0 in Y such that $d(f(x, y), f(x_0, y)) < \varepsilon$ $/d((x, y), f(x, y_0)) < \varepsilon/$ for all $x \in U$ and $y \in V$. A function f is said to be strongly continuous with respect to x $/y/$ if it is so at every point $(x, y) \in X \times Y$.

Note that, for a real function of two variables, the notion of continuity in the strong sense with respect to a given variable and the notion of strong continuity with respect to the same variable are equivalent.

In 1998 Dzagnidze established that a real function of two variables is continuous over a set of variables if and only if it is continuous in the strong sense with respect to each of the variables.

Here we transfer this result to the case of functions with values in a metric space: if X and Y are topological spaces, Z a metric space and a function $f : X \times Y \to Z$ is strongly continuous

with respect to y at a point $(x_0, y_0) \in X \times Y$, then the function f is jointly continuous if and only if f_y is continuous for all $y \in Y$.

It is obvious that every continuous function $f : X \times Y \to Z$ is strongly continuous with respect to x and y, but not vice versa. On the other hand, the strong continuity of the function f with respect to x or y implies the continuity of f with respect to x or y, respectively. Thus, strongly separately continuous functions are separately continuous.

Also, it is established that for topological spaces X and Y and a metric space Z a function $f : X \times Y \to Z$ is jointly continuous if and only if the function f is strongly continuous with respect to x and y.