Карлова О.О., Михайлюк В.В.

УЗАГАЛЬНЕННЯ ТЕОРЕМИ СЕРПІНСЬКОГО ПРО ОДНОЗНАЧНУ ВИЗНАЧЕНІСТЬ НАРІЗНО НЕПЕРЕРВНОЇ ФУНКЦІЇ

Одержано нові узагальнення теореми Серпінського про однозначну визначеність нарізно неперервної функції на добутку своїми значеннями на довільній всюди щільній множині.

Ключові слова і фрази: нарізно неперервна функція, ледь неперервна функція, теорема Серпінського.

Yurii Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine; Jan Kochanowski University, Kielce, Poland
e-mail: *maslenizza.ua@gmail.com (Olena Karlova); vmykhaylyuk@ukr.net (Volodymyr Mykhaylyuk)*

1 Вступ

У 1932-му році В. Серпінський [12] довів, що кожна дійснозначна нарізно неперервна функція на $\mathbb{R}^2$ однозначно визначається своїми значеннями на довільній щільній в $\mathbb{R}^2$ множині. Іншими словами, якщо дві нарізно неперервні функції збігаються на деякій всюди щільній множині, то вони обов'язково є рівними. Пізніше результат Серпінського був ще раз доведений в роботах [13] і [5], а також розвивався і узагальнювався багатьма математиками (дивись [3], [1], [11], [4], [7], [6]).

Як було виявлено З. Пьотровскім і Е. Вінґлером [11] результати про однозначну визначеність нарізно неперервних дійснозначних функцій нескладно можна переносити на випадок відображень зі значеннями у довільному цілком регулярному просторі. А саме, вони довели таку теорему.

Теорема 1 ([11])**.** *Нехай X і Y – довільні топологічні простори. Тоді якщо*

(1) *кожна нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ є ледь неперервною,*

то

(2) *для довільного цілком регулярного простору Z кожне нарізно неперервне відображення на $X \times Y$ і зі значеннями в Z однозначно визначається своїми значеннями на довільній всюди щільній в $X \times Y$ множині.*

УДК 515.12
2010 *Mathematics Subject Classification:* 26A21, 54C50.

Подальший розвиток даної тематики пов'язаний з працею М. Генріксена і Р. Вудса [4], яка присвячена вивченню властивостей *топології нарізної неперервності* $\sigma(X\times Y)$, тобто найслабшої топології на добутку $X \times Y$ цілком регулярних просторів X і Y, відносно якої кожна нарізно неперервна функція $f : X\times Y \to \mathbb{R}$ є неперервною. Зокрема, там було встановлено, що для $Z = \mathbb{R}$ і цілком регулярних просторів X і Y умови (1) і (2) з теореми 1 є рівносильними. Крім того, вони довели таке узагальнення теореми Серпінського.

Теорема 2. *([4, Твердження 3.2, Лема 3.4]) Нехай $\aleph$ – нескінченний кардинал, X – $\aleph^+$-берівський простір і Y – топологічний простір з π-характером $\le \aleph$. Тоді кожна нарізно неперервна функція на $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ однозначно визначається своїми значеннями на довільній всюди щільній в добутку $X \times Y$ множині.*

Слід зауважити, що у [7] одержано подібний результат, який доводиться з допомогою *хрест-топології* на добутку $X\times Y$, котра також тісно пов'язана з нарізно неперервними функціями.

Теорема 3 ([7])**.** *Нехай X – берівський простір, Y – топологічний простір зі зліченним π-характером і Z – урисоновий простір. Тоді кожна нарізно неперервна функція на $f : X\times Y \to Z$ однозначно визначається своїми значеннями на довільній всюди щільній в добутку $X \times Y$ множині.*

Разом з узагальненнями теореми Серпінського на випадок абстрактних просторів X, Y і Z природно виникає також питання про можливість послаблення умов нарізної неперервності. А саме, мова йде про одержання теорем про обов'язкову рівність відображень $f : X \times Y \to Z$ і $g : X \times Y \to Z$ з певного класу, якщо вони збігаються на деякій щільній в $X\times Y$ множині. Такого сорту дослідження (для відображень багатьох змінних) було проведено у роботі [6], де було одержано наступний результат.

Теорема 4 ([6])**.** *Нехай X – берівський простір, Y – топологічний простір зі зліченним π-характером, Z – урисоновий простір, $A \subseteq X \times Y$ – щільна в $X \times Y$ множина, $f : X \times Y \to Z$ і $g : X\times Y \to Z$ – відображення, які є слабко горизонтально квазінеперервними, неперервними відносно другої змінної, одностайно ледь неперервними відносно першої змінної і такі, що $f|_A = g|_A$. Тоді $f = g$.*

Зазначимо, що, незважаючи на досить широке розмаїття умов і термінологічні відмінності, методи доведення теорем 2, 3 і 4, в цілому, є подібними. У даній статті ми викладемо цей метод у загальній редакції і отримаємо теорему, яка узагальнює вищезгадані результати. Крім того, ми проаналізуємо, для яких класів просторів виконується теорема Серпінського для нарізно неперервних функцій і наведемо деякі приклади.

2 Одностайні властивості відображень двох відображень

В даному пункті ми розглянемо одностайні властивості двох відображень, які для квазінеперервності і ледь неперервності були введені в [6].

Нехай X і Y – топологічні простори і P – деяка властивість відображень. Ми будемо говорити, що відображення $f : X \to Y$ і $g : X \to Y$ *одностайно володіють властивістю* P, якщо діагональне відображення $h = f \triangle g : X \to Y^2$,

$$h(x) = (f(x), g(x)),$$

має властивість P.

Для відображення $f : X \times Y \to Z$ і точок $x \in X$ і $y \in Y$ відображення $f^x : Y \to Z$, $f^x(v) = f(x, v)$, і $f_y : X \to Z$, $f_y(u) = f(u, y)$, називатимемо *вертикальним x-розрізом* і *горизонтальним y-розрізом* відповідно.

Ми будемо казати, що відображення $f : X \times Y \to Z$ *володіє властивістю P відносно першої змінної*, якщо кожний горизонтальний y-розріз f_y володіє властивістю P. І, відповідно, f *володіє властивістю P відносно другої змінної*, якщо кожний вертикальний x-розріз f_y володіє властивістю P.

Аналогічно вводиться поняття одностайного володіння тією чи іншою властивістю для функцій двох змінних. Нехай X, Y і Z – топологічні простори і P – деяка властивість відображень. Ми будемо говорити, що відображення $f : X \times Y \to Z$ і $g : X \times Y \to Z$ *одностайно володіє властивістю P відносно першої (другої) змінної*, якщо діагональне відображення $h = f \triangle g : X \times Y \to Z^2$,

$$h(x, y) = (f(x, y), g(x, y)),$$

має властивість P відносно першої (другої) змінної.

Твердження 1. *Нехай X, Y, Z – топологічні простори і P – деяка властивість відображень. Тоді відображення $f : X \times Y \to Z$ і $g : X \times Y \to Z$ одностайно володіють властивістю P відносно другої змінної тоді і тільки тоді, коли для кожного $x \in X$ вертикальні розрізи f^x і g^x одностайно володіють властивістю P.*

Доведення. Покладемо $h = f \triangle g : X \times Y \to Z^2$. Залишилось зауважити, що

$$h^x = f^x \triangle g^x$$

для кожного $x \in X$. □

Аналогічне твердження має місце і щодо властивостей відносно першої змінної. Крім того, зрозуміло, що довільні два неперервні відображення є одностайно неперервними, а довільні два нарізно неперервні відображення є одностайно нарізно неперервними.

3 Ледь неперервність та деякі її модифікації

Нагадаємо, що відображення $f : X \to Y$ між топологічними просторами X і Y називається *ледь неперервним в точці* $x_0 \in X$, якщо для довільного околу V точки $f(x_0)$ в просторі Y існує непорожня відкрита множина G в просторі X така, що $f(G) \subseteq V$. Відображення $f : X \to Y$, яке є ледь неперервним в кожній точці $x \in X$ називається *ледь неперервним.* Іншими словами, відображення $f : X \to Y$ є ледь неперервним, якщо

$$\operatorname{int} f^{-1}(V) \neq \varnothing$$

для довільної відкритої в просторі Y множини V такої, що $f^{-1}(V) \neq \varnothing$.

Ми будемо використовувати наступне послаблення ледь неперервності. Відображення $f : X \to Y$ між топологічними просторами X і Y називатимемо *ледь* неперервним*, якщо

$$\operatorname{int} f^{-1}(\overline{V}) \neq \varnothing$$

для довільної відкритої в просторі Y множини V такої, що $f^{-1}(V) \neq \varnothing$.

Зрозуміло, що кожне ледь неперервне відображення є ледь* неперервним. З іншого боку, обернена імплікація має місце у наступному випадку.

Твердження 2. *Нехай X – топологічний простір і Y – регулярний простір. Тоді кожне ледь* неперервне відображення $f : X \to Y$ є ледь неперервним.*

Доведення. Нехай V – відкрита в просторі Y множина така, що $f^{-1}(V) \neq \varnothing$. Виберемо довільну точку $x_0 \in f^{-1}(V)$ і відкритий окіл V_1 точки $y_0 = f(x_0)$ в просторі Y такий, що $\overline{V}_1 \subseteq V$. Тепер маємо

$$\operatorname{int} f^{-1}(V) \supseteq \operatorname{int} f^{-1}(\overline{V}_1) \neq \varnothing.$$

□

Але, як показує наступний приклад, обернена імплікація для гаусдорфових просторів Y не є вірною.

Твердження 3. *Існують зліченний метризовний простір X, гаусдорфовий зв'язний простір Y і ледь* неперервне відображення $f : X \to Y$, яке не є ледь неперервним у кожній точці $x \in X$.*

Доведення. Нехай $\mathbb{Q}^+ = \mathbb{Q} \cap [0, +\infty)$, топологічний простір $X = \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}$ наділений евклідовою топологією і $Y = \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}$ є простором Бінга (див. [2, Приклад 6.1.6]), тобто для кожної точки $y = (u, v) \in \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}$ базу околів цієї очки в просторі Y утворюють множини

$$V_\varepsilon(y) = \{y\} \cup \{(r, 0) : |r - \tfrac{u-v}{\sqrt{3}}| < \varepsilon\} \cup \{(r, 0) : |r - \tfrac{u+v}{\sqrt{3}}| < \varepsilon\},$$

де $\varepsilon > 0$.

Розглянемо тотожне відображення $f : X \to Y$. Оскільки для довільних $y \in \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}$ і $\varepsilon > 0$ множина $V_\varepsilon(y)$ має порожню внутрішність в просторі X, то відображення f не є ледь неперервним у кожній точці.

З іншого боку, замикання в просторі Y кожної множини $V_\varepsilon(y)$ має непорожню внутрішність в просторі X. Тому відображення f є ледь неперервним у кожній точці. □

Дещо модифікуючи цей приклад можна одержати аналогічний результат і для урисонових просторів Y.

Топологічний простір X називається *урисоновим*, якщо для довільних різних точок $x_1, x_2 \in X$ існують замкнені околи U_1 і U_2 цих точок такі, що $U_1 \cap U_2 = \varnothing$.

Твердження 4. *Існують зліченний метризовний простір X, урисоновий простір Y і ледь* неперервне відображення $f : X \to Y$, яке не є ледь неперервним у кожній точці $x \in X$.*

Доведення. Нехай, як і в попередньому твердженні, топологічний простір $X = \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}$ наділений евклідовою топологією і $Y = \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}$. Розглянемо на множині Y наступну топологію. Для кожної точки $y = (u, v) \in \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}$ базу околів цієї очки в просторі Y утворюватимуть множини

$$W_\varepsilon(y) = \{y\} \cup \{(r, 0) : |r - \tfrac{u-v}{\sqrt{3}}| < \varepsilon\},$$

де $\varepsilon > 0$.

Розглянемо, як і в твердженні 3, тотожне відображення $f : X \to Y$, яке не є ледь неперервним у кожній точці, адже всі множини $W_\varepsilon(y)$ також мають порожню внутрішність в просторі X.

Крім того, замикання $\overline{W}_\varepsilon(y)$ в просторі Y кожної множини $W_\varepsilon(y)$ має вигляд

$$\overline{W}_\varepsilon(y) = \{(r, s) \in \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q} : |r - \tfrac{u-v}{\sqrt{3}}| < \varepsilon\},$$

де $y = (u, v)$. Тому множина $\overline{W}_\varepsilon(y)$ має непорожню внутрішність в просторі X і відображення f є ледь неперервним у кожній точці. $\square$

4 Горизонтальна слабка квазінеперервність відносно бази

Нехай X, Y і Z – топологічні простори. Відображення $f : X \times Y \to Z$ називається *слабко горизонтально квазінеперервним*, якщо для довільних відкритих в X і Y множин G і H і довільної щільної в G множини $A \subseteq X$ виконується включення

$$f(G \times H) \subseteq \overline{f(A \times H)}.$$

Ми будемо використовувати наступну модифікацію цього поняття.

Нехай X, Y, Z – топологічні простори і $\mathcal{W}$ – система підмножин простору Z. Відображення $f : X \times Y \to Z$ називатимемо *слабко горизонтально квазінеперервним відносно системи* $\mathcal{W}$, якщо для довільних відкритих в X і Y множин G і H, довільної щільної в G множини $A \subseteq X$ і довільної множини $W \in \mathcal{W}$ виконується умова

$$f(A \times H) \subseteq W \qquad \Rightarrow \qquad f(G \times H) \subseteq \overline{W}.$$

Наступні факти легко доводяться з допомогою означень.

Твердження 5. *Відображення $f : X \times Y \to Z$ є слабко горизонтально квазінеперервним тоді і тільки тоді, коли f є слабко горизонтально квазінеперервним відносно системи 2^Z.*

Твердження 6. *Нехай відображення $f : X \times Y \to Z$ є слабко горизонтально квазінеперервним відносно системи $\mathcal{A}$ і відображення $g : X \times Y \to Z$ є слабко горизонтально квазінеперервним відносно системи $\mathcal{B}$. Тоді діагональне відображення $f \triangle g : X \times Y \to Z$ є слабко горизонтально квазінеперервним відносно системи $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$.*

Відображення $f : X \times Y \to Z$ називатимемо *слабко горизонтально квазінеперервним відносно бази*, якщо існує база $\mathcal{W}$ топології простору Z така, що f є слабко горизонтально квазінеперервним відносно $\mathcal{W}$.

Наслідок 1. *Довільні слабко горизонтально квазінеперервні відносно бази відображення $f : X \times Y \to Z$ і $g : X \times Y \to Z$ є одностайно слабко горизонтально квазінеперервним відносно бази.*

Доведення. Нехай $\mathcal{W}_1$ і $\mathcal{W}_2$ – такі бази в просторі Z, що f є слабко горизонтально квазінеперервним відносно бази $\mathcal{W}_1$ і g є слабко горизонтально квазінеперервним відносно бази $\mathcal{W}_2$. Тоді згідно з твердженням 6 відображення $f \triangle g$ є слабко горизонтально квазінеперервним відносно бази $\mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2$. □

Наступний простий приклад показує, що поняття слабко горизонтально квазінеперервного відносно бази відображення є істотним розширенням поняття слабко горизонтально квазінеперервного відображення.

Твердження 7. *Існує слабко горизонтально квазінеперервне відносно бази відображення $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, яке не є слабко горизонтально квазінеперервним.*

Доведення. Нехай $A = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ і $B = [0,1] \setminus \mathbb{Q}$. Достатньо розглянути функцію

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & x \in A^2, \\ 1, & x \in (A \times B) \cup (B \times A), \\ 2, & x \in B^2, \end{cases}$$

яка є слабко горизонтально квазінеперервною відносно довільної бази на відрізку $[0,1]$, що складається з множин діаметра меншого, ніж 1. Крім того, оскільки

$$f([0,1]^2) \not\subseteq \overline{f(A \times [0,1])},$$

то функція f не є слабко горизонтально квазінеперервною. □

Крім того, зауважимо, що аналог наслідку 1 для слабко горизонтально квазінеперервних відображень не є вірним.

Твердження 8. *Існує слабко горизонтально квазінеперервні відображення $f : [0,1]^2 \to [0,1]$ і $g : [0,1]^2 \to [0,1]$ такі, що відображення $f \triangle g$ не є слабко горизонтально квазінеперервним.*

Доведення. Нехай $A = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ і $B = [0,1] \setminus \mathbb{Q}$. Достатньо розглянути функції

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & y \in A, \\ 1, & y \in B, \end{cases}$$

і

$$g(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & x \neq \frac{1}{2}, \\ 1 - f(x,y), & x = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

□

5 Сукупна ледь* неперервність відображень двох змінних

Нехай X, Y і Z – топологічні простори. Відображення $f : X \times Y \to Z$ називатимемо *горизонтально ледь неперервним в точці* $(x_0, y_0) \in X \times Y$, якщо для довільного околу W точки $f(x_0, y_0)$ в просторі Z існує непорожня відкрита множина U в просторі X і точка $y \in Y$ такі, що

$$f(U \times \{y\}) \subseteq W.$$

Відображення $f : X \times Y \to Z$, яке є горизонтально ледь неперервним в кожній точці $(x, y) \in X \times Y$ називатимемо *горизонтально ледь неперервним.*

Зрозуміло, що горизонтальна ледь неперервність є ослабленням горизонтальної квазінеперервності і ледь неперервності відносно першої змінної.

Нагадаємо деякі означення. Відображення f між топологічними просторами X і Y називається *квазінеперервним в точці* $x_0 \in X$, якщо для довільного околу U точки x_0 в просторі X і довільного околу V точки $y_0 = f(x_0)$ в просторі Y існує відкрита в X непорожня множина $G \subseteq U$ така, що $f(G) \subseteq V$. Відображення $f : X \to Y$, яке є квазінеперервним в кожній точці $x \in X$, називається *квазінеперервним.*

Система $\mathcal{B}$ непорожніх відкритих підмножин топологічного простору X називається *псевдобазою*, якщо для довільної непорожньої відкритої в X множини G існує елемент $B \in \mathcal{B}$ такий, що $B \subseteq G$.

Система $\mathcal{B}$ непорожніх відкритих підмножин топологічного простору X називається *псевдобазою в точці* x, якщо для довільного околу U точки x в просторі X існує елемент $B \in \mathcal{B}$ такий, що $B \subseteq U$.

Для топологічного простору X *π-характером $\pi_\chi(x, X)$ простору X в точці $x \in X$* називається найменша потужність псевдобази $\mathcal{B}$ в точці x. Відповідно *π-характером простору* X називається кардинал

$$\pi_\chi(X) = \sup_{x \in X} \pi_\chi(x, X).$$

Нехай $\aleph$ – нескінченний кардинал. Топологічний простір X називається *$\aleph$-берівським*, якщо для довільної сім'ї $(G_i : i \in I)$ відкритих всюди щільних в X множин G_i такої, що $|I| < \aleph$, перетин $\bigcap\limits_{i \in I} G_i$ є щільним в просторі X. Зрозуміло, що топологічний простір X є берівським тоді і тільки тоді, коли X є $\aleph_1$-берівським, де $\aleph_1$ – перший незліченний кардинал.

Наступний результат про сукупну ледь* неперервність відображень двох змінних займає центральне місце у доведенні узагальнення теореми Серпінського.

Теорема 5. *Нехай $\aleph$ – нескінченний кардинал, X – $\aleph$-берівський простір, Y – топологічний простір, Z – топологічний простір, $f \colon X \times Y \to Z$ – відображення, яке є горизонтально ледь неперервним і слабко горизонтально квазінеперервним відносно бази. Нехай, крім того, виконується одна з наступних умов:*

(a) в просторі Y існує псевдобаза $\mathcal{B}$ з $|\mathcal{B}| < \aleph$ і f є ледь неперервним відносно другої змінної;

(б) $\pi_\chi(Y) < \aleph$ *і* f *є квазінеперервним відносно другої змінної.*

Тоді f *є ледь* неперервним за сукупністю змінних.*

Доведення. Візьмемо довільну відкриту в просторі Z множину G таку, що $f^{-1}(G) \neq \varnothing$, і покажемо, що

$$\operatorname{int} f^{-1}(\overline{G}) \neq \varnothing.$$

Нехай $\mathcal{W}$ – база в просторі Z, відносно якої f є слабко горизонтально квазінеперервним. Виберемо точку $(x_0, y_0) \in f^{-1}(G)$ і елемент $W \in \mathcal{W}$ такі, що

$$f(x_0, y_0) = z_0 \in W \subseteq G.$$

Використовуючи горизонтальну ледь неперервність відображення f в точці (x_0, y_0) виберемо точку $y_1 \in Y$ і відкриту непорожню множину U_1 в просторі X такі, що

$$f(U_1 \times \{y_1\}) \subseteq W.$$

(а). Використовуючи ледь неперервність відображення f відносно другої змінної, для кожного $x \in U_1$ знайдемо елемент $B(x) \in \mathcal{B}$ такий, що

$$f(\{x\} \times B(x)) \subseteq W.$$

Для кожного $B \in \mathcal{B}$ покладемо

$$A(B) = \{x \in U_1 : B(x) = B\}.$$

Оскільки $\bigcup\limits_{B \in \mathcal{B}} A(B) = U_1$, $|\mathcal{B}| < \aleph$ і X є $\aleph$-берівським, то існує відкрита непорожня множина $U \subseteq U_1$ і елемент $B \in \mathcal{B}$ такі, що $U \subseteq \overline{A(B)}$. Тоді

$$f(A(B) \times B) \subseteq W$$

і

$$f(U \times B) \subseteq \overline{W},$$

адже f є слабко горизонтально квазінеперервним відносно $\mathcal{W}$. Тепер маємо, що

$$\varnothing \neq U \times B \subseteq \operatorname{int} f^{-1}(\overline{W}) \subseteq \operatorname{int} f^{-1}(\overline{G}).$$

(б). Нехай $\mathcal{B}$ – псевдобаза в точці y_1 з $|\mathcal{B}| < \aleph$. Далі міркуємо цілком аналогічно, як в доведенні пункту (а), використовуючи квазінеперервність f відносно другої змінної замість її ледь неперервності відносно другої змінної. $\square$

6 Узагальнення теореми Серпінського

Розпочнемо з розгляду відображень однієї змінної.

Твердження 9. *Нехай X і Y – топологічні простори, $A \subseteq X$ – щільна в X множина, $F \subseteq Y$ – замкнена в Y множина і $f : X \to Y$ – ледь неперервне відображення таке, що $f(A) \subseteq F$. Тоді $f(X) \subseteq F$.*

Доведення. Припустимо, що це не так, тобто $f^{-1}(G) \neq \varnothing$, де $G = Y \setminus F$. Оскільки відображення f ледь неперервне, то відкрита множина $U = \mathrm{int}(f^{-1}(G))$ є непорожньою. Тому $U \cap A \neq \varnothing$, адже множина A щільна в X. Тепер, вибравши довільну точку $a \in A \cap U$, матимемо

$$f(a) \in f(A) \cap f(U) \subseteq F \cap G = \varnothing,$$

що неможливо. □

Наслідок 2. *Нехай X – топологічний простір, Y – гаусдорфовий простір, $A \subseteq X$ – щільна в X множина, $f : X \to Y$ і $g : X \to Y$ – одностайно ледь неперервні відображення такі, що $f(x) = g(x)$ для кожного $x \in A$. Тоді $f = g$.*

Доведення. Оскільки простір Y гаусдорфовий, то діагональ

$$F = \{(y, y) : y \in Y\}.$$

є замкненою в добутку $Z = Y^2$. Залишилось застосувати твердження 9 до ледь неперервного відображення $h = f \triangle g : X \to Z$. □

Подібним чином доводиться наступний факт.

Твердження 10. *Нехай X – топологічний простір, Y – урисоновий простір, $A \subseteq X$ – щільна в X множина, $f : X \to Y$ і $g : X \to Y$ – одностайно ледь* неперервні відображення такі, що $f(x) = g(x)$ для кожного $x \in A$. Тоді $f = g$.*

Доведення. Нехай $Z = Y^2$,

$$F = \{(y, y) : y \in Y\}$$

і $h = f \triangle g$. Припустимо, що $f \neq g$, тобто існує точка $x_0 \in X$ така, що $z_0 = h(x_0) \notin F$. Оскільки простір Y урисоновий, то існує замкнений окіл W точки z_0 в Z такий, що $W \cap F = \varnothing$. З ледь* неперервності відображення h випливає, що

$$U = \mathrm{int}\, h^{-1}(W) \neq \varnothing.$$

Залишилось, як і при доведенні твердження 9 взяти довільну точку $a \in A \cap U$ і одержати суперечність. □

Наступна теорема є основним результатом даної статті.

Теорема 6. *Нехай $\aleph$ – нескінченний кардинал, X – $\aleph$-берівський простір, Y – топологічний простір, A – щільна в $X \times Y$ множина, Z – урисоновий простір, $f : X \times Y \to Z$ і $g : X \times Y \to Z$ – відображення, які одностайно горизонтально ледь неперервні і слабко горизонтально квазінеперервне відносно бази. Нехай, крім того, виконується одна з наступних умов:*

(а) *в просторі Y існує псевдобаза $\mathcal{B}$ з $|\mathcal{B}| < \aleph$ та f і g є одностайно ледь неперервними відносно другої змінної;*

(б) *$\pi_\chi(Y) < \aleph$ та f і g є одностайно квазінеперервними відносно другої змінної.*

Тоді якщо $f|_A = g|_A$, то $f = g$.

Доведення. Розглянемо діагональне відображення $h = f \triangle g$, яке задовольняє умови теореми 5. Тому h є ледь* неперервним за сукупністю змінних, тобто відображення f і g є одностайно ледь* неперервними за сукупністю змінних. Залишилось використати твердження 10.

$\square$

7 Трійки Серпінського і випадок нарізно неперервних відображень

Трійку (X, Y, Z) топологічних просторів X, Y і Z називатимемо *трійкою Серпінського*, якщо кожне нарізно неперервне відображення $f : X \times Y \to Z$ однозначно визначається своїми значеннями на довільній щільній в $X \times Y$ множині.

З теореми 6 негайно випливає наступний факт.

Наслідок 3. *Нехай $\aleph$ – нескінченний кардинал, X – $\aleph$-берівський простір, Y – топологічний простір з $\pi_\chi(Y) < \aleph$ і Z – урисоновий простір. Тоді трійка (X, Y, Z) є трійкою Серпінського.*

Наступний приклад, загальнішу редакцію якого можна знайти в [4, Теорема 3.6], вказує на істотність умови типу беровості в даному твердженні.

Твердження 11. *Існує нарізно неперервна ненульова функція $f : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{R}$ така, що $f|_A = 0$ для деякої щільної в $\mathbb{Q}^2$ множини A.*

Доведення. Нехай A – деяка щільна в $\mathbb{Q}^2$ множина така, що для кожного $r \in \mathbb{Q}$ множини

$$A \cap (\{r\} \times \mathbb{Q}) \qquad \text{і} \qquad A \cap (\mathbb{Q} \times \{r\})$$

є скінченними.

Нехай

$$\mathbb{Q} = \{r_n : n \in \mathbb{N}\},$$

де всі числа r_n – різні. Виберемо довільну точку $p_0 \in \mathbb{Q}^2 \setminus A$ і покладемо

$$f(p_0) = 1.$$

Крім того, покладемо

$$f(p) = 0$$

для кожного $p \in A$. Далі послідовно довизначимо функцію f на множинах

$$\{r_1\} \times \mathbb{Q},\ \mathbb{Q} \times \{r_1\},\ \{r_2\} \times \mathbb{Q},\ \mathbb{Q} \times \{r_2\}, \dots$$

так, щоб звуження на кожну з таких множин було неперервним.

Легко бачити, що побудована таким чином ненульова функція $f : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{R}$ є нарізно неперервною і $f|_A = 0$. □

У зв'язку з наслідком 3 (чи теоремами 2, 3 і 4) виникає гіпотеза про те, що оцінки на псевдохарактер одного з множників X і Y є необхідними умовами для утворення трійок Серпінського. Насправді це не так, бо результати типу теореми 1 разом з різноманітними узагальненнями теореми Наміоки [10] дають можливість одержувати цілі класи трійок Серпінського, які знаходяться за межами застосування методу міркувань, використаного при доведенні теореми 6. Далі ми трохи детальніше проаналізуємо такий спосіб побудови трійок Серпінського.

Спочатку ми дамо результати, які узагальнюють і розвивають теорему 1.

Топологічний простір X називається *функціонально гаусдорфовим*, якщо для довільних двох різних точок $x, y \in X$ існує неперервна функція $f : X \to [0, 1]$ така, що $f(x) = 0$ і $f(y) = 1$.

Наступна теорема фактично була доведена в [11].

Теорема 7. *Нехай X і Y – топологічні простори такі, що кожна нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to [0, 1]$ є ледь неперервною. Тоді для довільного функціонально гаусдорфового простору Z трійка (X, Y, Z) є трійкою Серпінського.*

Доведення. Нехай $A \subseteq X \times Y$ – щільна в $X \times Y$ множина, $g : X \times Y \to Z$ і $h : X \times Y \to Z$ – нарізно неперервні відображення такі, що $g|_A = h|_A$. Доведемо, що $g = h$.

Припустимо, що $g \neq h$, тобто існує точка $(x_0, y_0) \in X \times Y$ така, що

$$z_1 = g(x_0, y_0) \neq h(x_0, y_0) = z_2.$$

Візьмемо неперервну функцію $\varphi : Z \to [0, 1]$ таку, що $\varphi(z_1) = 1$ і $\varphi(z_2) = 0$. Розглянемо нарізно неперервну функцію $f : X \times Y \to [0, 1]$,

$$f(x, y) = |\varphi(g(x, y)) - \varphi(h(x, y))|,$$

яка згідно з умовою є ледь неперервною в точці (x_0, y_0). Оскільки $f(x_0, y_0) = 1$, то існує відкрита непорожня множина $G \subseteq X \times Y$ така, що

$$f(G) \subseteq (\tfrac{1}{2}, 1].$$

Але взявши довільну точку $a \in A \cap G$ одержимо $f(a) = 0$, що дає суперечність. □

Топологічний простір X називатимемо *цілком відокремним*, якщо для довільних двох різних точок $x, y \in X$ існує неперервна функція $f : X \to \{0, 1\}$ така, що $f(x) = 0$ і $f(y) = 1$.

Теорема 8. *Нехай X і Y – довільні топологічні простори. Тоді кожна з наступних умов випливає з попередньої:*

(1) існує нетривіальний цілком незв'язний простір Z такий, що кожна нарізно неперервне відображення $f : X \times Y \to Z$ є ледь неперервним;

(2) кожна нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \{0, 1\}$ є ледь неперервною;

(3) для довільного цілком незв'язного простору Z трійка (X, Y, Z) є трійкою Серпінського.

Доведення. (1) $\Rightarrow$ (2). Нехай z_0 і z_1 – довільні різні точки простору Z, і $f : X \times Y \to \{0, 1\}$ –нарізно неперервна функція. Розглянемо нарізно неперервне відображення $g : X \times Y \to Z$, означене формулою

$$g(x, y) = z_{f(x,y)}.$$

Тепер з ледь неперервності відображення g випливає ледь неперервність функції f.

Імплікація (2) $\Rightarrow$ (3) доводиться повністю аналогічно, як теорема 7. □

Тепер переходимо до одержання прикладів трійок Серпінського.

Твердження 12. *Нехай X і Y топологічні простори такі, що для довільної нарізно неперервної функції $f : X \times Y \to [0, 1]$ і кожного $y \in Y$ множина A_y всіх точок $x \in X$ таких, що функція f сукупно неперервна в точці (x, y), є щільною в X. Тоді для довільного функціонально гаусдорфового простору Z трійка (X, Y, Z) є трійкою Серпінського.*

Доведення. Легко перевірити, що кожна нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to [0, 1]$ є квазінеперервною, а отже, і ледь неперервною. Залишилось використати теорему 7. □

Наслідок 4. *Нехай X, Y – компактні простори і Z – функціонально гаусдорфовий простір. Тоді трійка (X, Y, Z) є трійкою Серпінського.*

Доведення. Як випливає з теореми Наміоки [10] простори X і Y задовольняють умови твердження 12. □

Зауваження 1. Теорема Наміоки узагальнювалась багатьма математиками (див., наприклад, [8] і вказану там літературу). Використовуючи ці результати одержуються ширші класи просторів X і Y, які разом з довільним функціонально гаусдорфовим простором Z утворюють трійки Серпінського.

Як показує наступний приклад, на добутку довільного берівського простору X і компактного простору Y теорема Серпінського може не виконуватись.

Твердження 13. *Існують берівський простір X, компактний простір Y і ненульова нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \{0, 1\}$, яка дорівнює нулеві на деякій всюди щільній в $X \times Y$ множині A.*

Доведення. Достатньо розглянути приклад скрізь розривної нарізно неперервної функції з [9, Теорема 1.2]. □

8 Відкриті питання

Питання 1. *Нехай X, Y і Z – топологічні простори такі, що довільне нарізно неперервне відображення $f : X\times Y \to Z$ є ледь неперервним. Чи обов'язково діагональ двох нарізно неперервних відображень $g : X \times Y \to Z$ і $h : X \times Y \to Z$ є ледь неперервною?*

Питання 2. *Нехай X, Y – топологічні простори і Z – урисоновий (функціонально гаусдорфовий, цілком регулярний) простір такі, що довільне нарізно неперервне відображення $f : X \times Y \to Z$ є ледь неперервним. Чи обов'язково трійка (X, Y, Z) є трійкою Серпінського?*

Список літератури

[1] Comfort W.W. *Functions linearly continuous on a product of Baire spaces* Boll. Un. Mat. Ital. **20** (1965), 128–134.

[2] Engelking R., *General Topology*, Revised and completed edition, Heldermann Verlag, Berlin (1989).

[3] Goffman C., Neugebauer C.J. *Linearly continuous functions* Proc. Amer. Math. Soc. **12** (1961), 997–998.

[4] Henriksen M., Woods R. G. *Separate versus joint continuity: A tale of four topologies*, Top. Appl. **97** (1999), 175–205.

[5] Marcus S. *On functions continuous in each variable*, Doklady Akad. Nauk SSSR. **112** (1957), 812–814.

[6] Maslyuchenko V.K, Filipchuk O.I. *New generalizations of Serpinsky's theorem*, Math. studiyi **47** (1) (2017), 91–99.

[7] Mykhaylyuk V.V. *Separate continuity topology and a generalization of Sierpinski's theorem*, Math. Stud. **14** (2) (2000), 193–196.

[8] Mykhaylyuk V. *Namioka spaces, GO-spaces and o-game*, Top. Appl. **235** (2018), 1–13.

[9] Mykhaylyuk V., Pol R. *On a problem of Talagrand concerning separately continuous functions*, Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu (accepted).

[10] Namioka I. *Separate contimuity and joint continuity*, Pacif. J. Math. **51** (2) (1974), 515–531.

[11] Piotrowski Z., Wingler E.Y. *On Sierpiński's theorem on the determination of separately continuous functions*, Q&A in General Topology. **15** (1997), 15–19.

[12] Sierpiński W. *Sur une propertie de fonctions de deux variables reeles, continues par rapport á chacune de variables*, Publ. Math. Univ. Belgrade. **1** (1932), 125–128.

[13] Tolstov G. *On partial derivatives*, Amer. Math. Soc. (transl. **69**), Izv. Akad. Nauk SSSR Mat. **13** (1949), 425–449.

Надійшло 29.03.2021

Karlova O.O., Mykhaylyuk V.V. *A generalization of Sierpiński theorem on unique determining of a separately continuous function*, Bukovinian Math. Journal. **9**, 1 (2021), 250–263.

In 1932 Sierpiński proved that every real-valued separately continuous function defined on the plane $\mathbb{R}^2$ is determined uniquely on any everywhere dense subset of $\mathbb{R}^2$. Namely, if two

separately continuous functions coincide of an everywhere dense subset of $\mathbb{R}^2$, then they are equal at each point of the plane.

Piotrowski and Wingler showed that above-mentioned results can be transferred to maps with values in completely regular spaces. They proved that if every separately continuous function $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ is feebly continuous, then for every completely regular space Z every separately continuous map defined on $X \times Y$ with values in Z is determined uniquely on everywhere dense subset of $X \times Y$. Henriksen and Woods proved that for an infinite cardinal $\aleph$, an $\aleph^+$-Baire space X and a topological space Y with countable π-character every separately continuous function $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ is also determined uniquely on everywhere dense subset of $X \times Y$. Later, Mykhaylyuk proved the same result for a Baire space X, a topological space Y with countable π-character and Urysohn space Z.

Moreover, it is natural to consider weaker conditions than separate continuity. The results in this direction were obtained by Volodymyr Maslyuchenko and Filipchuk. They proved that if X is a Baire space, Y is a topological space with countable π-character, Z is Urysohn space, $A \subseteq X \times Y$ is everywhere dense set, $f : X \times Y \to Z$ and $g : X \times Y \to Z$ are weakly horizontally quasi-continuous, continuous with respect to the second variable, equi-feebly continuous with respect to the first one and such that $f|_A = g|_A$, then $f = g$.

In this paper we generalize all of the results mentioned above. Moreover, we analize classes of topological spaces wich are favorable for Sierpińsi-type theorems.